(6/3/22)

Ma se il dominio di una funzione strettamente monotòna è un intervallo, allora l'inversa è continua anche se la funzione stessa non è continua!

Teorema 2.66 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotòna. Allora, la funzione inversa di f, $f^{-1} : f(I) \to I$, è una funzione continua.*

Dimostrazione Possiamo assumere che f sia strettamente crescente (altrimenti si consideri $-f$). Per la Proposizione 1.117, $f^{-1} : J := f(I) \to I$ è strettamente crescente. Fissiamo $y_0 \in J$. Se y_0 è un punto isolato, f^{-1} è continua in y_0. Supponiamo, ora, che y_0 non sia isolato e consideriamo separatamente i limiti laterali. Se y_0 un punto di accumulazione sinistro per[1] J, allora, essendo f^{-1} strettamente crescente,

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) =: x_0 \ , \qquad \forall\ y \in J\ ,\ y < y_0\ ,$$

e, per la Proposizione 2.21,

$$\lim_{y \to y_0-} f^{-1}(y) = \sup_{y \in J, y < y_0} f^{-1}(y) =: \alpha \le x_0\ . \tag{$*$}$$

Supponiamo, per assurdo, che $\alpha < x_0$ e sia $y_1 \in J$ con $y_1 < y_0$. Allora, per definizione di α, $x_1 := f^{-1}(y_1) \le \alpha$, e quindi (essendo I un intervallo) $[\alpha, x_0] \subseteq [x_1, x_0] \subseteq I$. Sia ora $\bar{x} \in I$ tale che $\alpha < \bar{x} < x_0$, e sia $\bar{y} = f(\bar{x})$. Il punto $\bar{y}$ appartiene a J e $\bar{y} < y_0$, ma $\alpha < \bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ contraddice $(*)$.
Dunque in $(*)$ deve valere l'uguaglianza, ossia,

$$\lim_{y \to y_0-} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)\ .$$

In maniera del tutto analoga si dimostra (esercizio) che se y_0 è un punto di accumulazione destro per J allora

$$\lim_{y \to y_0+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)\ ,$$

e dunque, per la Proposizione 2.22, f^{-1} è continua in y_0. ∎

Da questo teorema e dal Corollario 2.54 segue immediatamente che

Se I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotòna e continua. Allora, la funzione inversa di f, f^{-1}, è una funzione continua definita sull'intervallo $J = f(I)$ a valori in I.

[1] Ossia, $J \cap (y_0 - \delta, y_0) \neq \varnothing$ per ogni $\delta > 0$