Una funzione continua non derivabile in alcun punto

Costruiamo una funzione $f \in C(\mathbb{R})$ che non sia derivabile in alcun punto $x \in \mathbb{R}$. L'esempio è dovuto al matematico olandese B. W. van der Waerden[1].

Proposizione (M–test di Weierstrass) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e $u_k \in C(E, \mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$. Se la serie numerica $\sum M_k$ converge, dove $M_k := \sup_E |u_k|$, allora per ogni $x \in E$ converge la serie $f(x) := \sum u_k$ e $f \in C(E, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione Sia $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ e $m < n$ e $x \in E$. Allora,

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \Big| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x) \Big| \le \sum_{k=m+1}^{n} |u_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} M_k \le \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k \, .$$

Essendo la serie $\sum M_k$ è convergente, $\sum_{k>m} M_k$ tende a 0 se $m \to \infty$, e quindi la successione $\{s_n(x)\}$ è di Cauchy per ogni $x \in E$ e converge ad una funzione $f : E \to \mathbb{R}$.
Fissiamo $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$. Sia N tale che $\displaystyle\sum_{k>N} M_k < \varepsilon/3$ e $\delta > 0$ tale che la funzione continua $g(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k(x)$ verifichi $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/3$ per ogni $x \in E$ con $|x - x_0| < \delta$. Allora,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \big(u_k(x) - u_k(x_0)\big) \Big| = \Big| (g(x) - g(x_0)) + \sum_{k>N} \big(u_k(x) - u_k(x_0)\big) \Big| \\ &\le |(g(x) - g(x_0)| + 2 \sum_{k>N} M_k < \varepsilon \, . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Esercizio Si dimostri che nelle ipotesi della Proposizione, *se le funzioni u_k sono uniformemente continue su E, allora f è uniformemente continua su E.*

Definiamo la funzione[2]

$$d_{\mathbb{Z}}(x) := \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z}) := \min \big\{ \{x\}, 1 - \{x\} \big\} \, ;$$

si noti che $d_{\mathbb{Z}}$ è una funzione continua di periodo 1 che vale

$$d_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} x \, , & \text{se } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \, , \\[2ex] 1 - x \, , & \text{se } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \, . \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (van der Waerden, 1930) *La funzione di van der Waerden*

$$W(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}}(10^n x)}{10^n} \, , \tag{2}$$

è una funzione continua su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 1 e non derivabile in alcun $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione Poiché $d_{\mathbb{Z}}$ è continua e $0 \le d_{\mathbb{Z}}(x) \le 1/2$, dalla Proposizione segue che $W \in C(\mathbb{R})$. Inoltre, $d_{\mathbb{Z}}(10^n x)$ è periodica di periodo 1 per ogni n e quindi W è periodica di

[1] Cfr. [B. W. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht–differenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z. 32 (1930)]. Un esempio molto simile era stato dato circa trent'anni prima dal matematico giapponese T. Takagi; per maggiori informazioni, vedi [Allaart, Pieter C.; Kawamura, Kiko *The Takagi function: a survey*. Real Anal. Exchange 37 (2011/12), no. 1, 1–54].

[2] $\{x\}$ denota la parte frazionaria di x.

periodo 1. Basta dunque dimostrare che $W'(x)$ non esiste per ogni $x \in [0,1)$.
Fissiamo $x \in [0,1)$ e sia $x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$ l'espansione decimale di[3] x. Definiamo[4]

$$\sigma_n := \begin{cases} -1\,, & \text{se } a_n = 4 \text{ oppure } a_n = 9 \\ \\ 1\,, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad , \qquad h_n := \frac{\sigma_n}{10^n}\,,$$

$$\bar\sigma_n := \begin{cases} 1 & \text{se } a_{n+1} \le 4 \\ \\ -1 & \text{se } a_{n+1} \ge 5 \end{cases}$$

$$x_n := 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \cdots = \{10^n x\}\,.$$

Lemma *Per ogni $j > n \ge 0$ si ha che, se $\bar\sigma_n = 1$, allora x_n e $x_n + 10^n h_j$ appartengono a $[0,1/2]$, mentre, se $\bar\sigma_n = -1$, allora x_n e $x_n + 10^n h_j$ appartengono a $[1/2,1)$ e*

$$d_{\mathbb{Z}}\big(x_n + 10^n h_j\big) - d_{\mathbb{Z}}(x_n) = \bar\sigma_n\, 10^n h_j\,. \tag{3}$$

Dimostrazione Se $\bar\sigma_n = 1$ allora $a_{n+1} \le 4$ e

$$0 \le x_n = \frac{a_{n+1}}{10} + \sum_{k\ge 2} \frac{a_{k+2}}{10^k} \le \frac{2}{5} + \sum_{k\ge 2} \frac{a_{k+2}}{10^k} < \frac{2}{5} + 9 \sum_{k\ge 2} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{2}\,,$$

mentre se $\bar\sigma_n = -1$, allora $a_{n+1} \ge 5$ e chiaramente $1/2 = 5/10 \le x_n < 1$.
Consideriamo il primo caso ($\bar\sigma_n = 1$). Se $j = n+1$ e $a_{n+1} = 4$, allora $\sigma_{n+1} = -1$ e

$$x_n + 10^n h_j = 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \cdots + \frac{\sigma_{n+1}}{10} = 0, 3\, a_{n+2} a_{n+3} \cdots \in [0,1/2)\,;$$

se $j = n+1$ e $a_{n+1} \le 3$,

$$x_n + 10^n h_j = 0, (a_{n+1} + 1)\, a_{n+2} a_{n+3} \cdots \le 0, 4\, a_{n+2} a_{n+3} \cdots \in [0,1/2)\,;$$

infine se $j = n+k$, con $k \ge 2$,

$$x_n + 10^n h_j = 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \cdots + \frac{\sigma_{n+k}}{10^k} = 0, a_{n+1} \cdots (a_{n+k} + \sigma_{n+k}) a_{n+k+1} \cdots$$

e se $a_{n+k} = 9$, $a_{n+k} + \sigma_{n+k} = 8$, quindi è solo la $(n+k)$–ma cifra decimale che cambia mentre tutte le altre rimangono uguali in particolare $a_n + 1$ rimane minore o uguale a 4 e quindi anche $x_n + 10^n h_j \in [0,1/2)$.
Nel secondo caso $x_n + 10^n h_j \ge x_n \ge 1/2$. D'altra parte se $a_{n+1} = 9$ e $j = n+1$,

$$x_n + 10^n h_j = 0, 8\, a_{n+1} a_{n+2} \cdots < 1$$

e se $j = n+k$, con $k \ge 2$, abbiamo visto che si modifica solo la $(n+k)$–ma cifra decimale e quindi, di nuovo $x_n + 10^n h_j < 1$.
La (3) è, a questo punto, conseguenza della (1). ∎

Riprendiamo la dimostrazione del Teorema. Si osservi che $h_j \to 0$ per $j \to \infty$ e si consideri il rapporto incrementale

$$\frac{W(x+h_j) - W(x)}{h_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{\mathbb{Z}}(10^n x + 10^n h_j) - d_{\mathbb{Z}}(10^n x)}{10^n}\,.$$

[3]Cioè, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ con a_k interi tra 0 e 9 e con infiniti a_k diversi da 9 (ossia, senza 'code' di tutti 9).

[4]Si noti che, se $k \ge 1$, $10^k x = a_1 10^{k-1} + \cdots + a_k + \frac{a_{k+1}}{10} + \frac{a_{k+2}}{10^2} + \cdots$ e quindi $\{10^k x\} = 0, a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \cdots$ e che tale relazione è vera anche per $k = 0$ (per definizione).

Si osservi che se $n \ge j$, allora $10^n h_j \in \mathbb{Z}$ e quindi per la periodicità di $d_{\mathbb{Z}}$ segue che

$$d_{\mathbb{Z}}(10^n x + 10^n h_j) = d_{\mathbb{Z}}(10^n x)\,,$$

e, dunque, per ogni $j \ge 1$,

$$\begin{aligned}\frac{W(x+h_j)-W(x)}{h_j} &= \frac{1}{h_j}\sum_{n=0}^{j-1}\frac{d_{\mathbb{Z}}(10^n x + 10^n h_j) - d_{\mathbb{Z}}(10^n x)}{10^n}\\ &\overset{(3)}{=} \sum_{n=0}^{j-1}\bar{\sigma}_n\,.\end{aligned}$$

Ma per $j \to \infty$ tale somma non converge (poiché σ_n non tende a 0 per $n \to \infty$) e questo, per il Teorema ponte, implica che il limite del rapporto incrementale non esiste. ∎