Irrazionalità del numero di Nepero e

Lemma 1 Vale la seguente disuguaglianza

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(q+1)!}\,\frac{q+2}{q+1}\,, \qquad \forall\, q \in \mathbb{N}_0\,. \tag{1}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(q+1)!}\Big(1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+3)(q+2)} + \cdots\Big) \\
&< \frac{1}{(q+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q+2)^k} \\
&= \frac{1}{(q+1)!}\,\frac{q+2}{q+1}\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1 $e \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione Per il Teorema 5.3 si ha che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,. \tag{2}$$

Supponiamo per assurdo che $e = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Allora, si avrebbe

$$N := q!\Big(e - \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\Big) = q!\Big(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\Big) = p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}\,,$$

e, d'altra parte,

$$N \overset{(2)}{=} q!\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \overset{(1)}{<} \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1\,,$$

il che, essendo $N > 0$, è una contraddizione, non esistendo alcun numero intero in $(0, 1)$. $\blacksquare$

Irrazionalità di π

La seguente è forse la dimostrazione più semplice dell'irrazionalità di[1] π. Cominciamo con un lemma preparatorio.

Lemma 2 *Dati $p, q, n \in \mathbb{N}$, sia $r = p/q \in \mathbb{Q}$ e si definiscano i seguenti polinomi di grado[2] $2n$:*

$$P(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}\,, \qquad Q := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^{2k} P\,. \tag{3}$$

Allora, P e Q verificano le seguenti proprietà:

(i) *P soddisfa le seguenti relazioni*

$$P(r-x) = P(x)\,,\ \ \forall\, x\,; \qquad P(x) \le \frac{(qr^2/4)^n}{n!}\,,\ \ \forall\, x\,; \qquad P(x) > 0\,,\ \ \forall\, x \in (0, r)\,. \tag{4}$$

(ii) *$Q(0) + Q(r) =: m \in \mathbb{Z}$.*

(iii) *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$Q'' + Q = P\,, \qquad \Big(Q'\sin x - Q\cos x\Big)' = P\sin x\,. \tag{5}$$

---

[1] Cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational.

[2] D denota la derivata rispetto a x.

Dimostrazione (i) La prima relazione in (4) segue immediatamente dalla definizione date. La seconda e terza relazione seguono osservando che $P = \big(x(p-qx)\big)^n/n!$ e che $x(p-qx) = qx(r-x)$ è una parabola che si annulla in 0 e $r = p/q$ e massimo in $r/2 = p/(2q)$.
(ii) Per la formula del binomio di Newton si hache

$$P(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} m_k x^{n+k}\,, \qquad m_k \in \mathbb{Z}\,,$$

da cui segue[3]

$$D^j P(0) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \le j < n\,,\ \text{o se } j > 2n\,, \\[2ex] \dfrac{j!}{n!}\, m_{j-n} \in \mathbb{Z} & \text{se } n \le j \le 2n\,, \end{cases}$$

e quindi $D^j P(0) \in \mathbb{Z}$ per ogni j. Da (i) segue che $D^j P(0) = (-1)^j D^j P(r) \in \mathbb{Z}$ e dunque, dalla definizione di Q segue che $m := Q(0) + Q(r) \in \mathbb{Z}$.
(iii) Dalla definizione di Q, osservando (punto precedente) che $D^{2n+2}P = 0$, segue che

$$Q'' = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^{2k+2}P = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k D^{2k+2}P = -\sum_{h=1}^{n}(-1)^h D^{2h}P = -Q + P\,.$$

che è equivalente alla prima relazione in (5); la seconda relazione segue immediatamente dalla prima. ∎

Teorema 2 $\pi \notin \mathbb{Q}$.
Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che $\pi = p/q =: r \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e siano P e Q come nel Lemma 2. Dal teorema fondamentale del calcolo segue che

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P(x)\sin x \quad &\overset{(5)}{=} \quad \int_0^\pi \Big(Q'\sin x - Q\cos x\Big)' \\ &= \quad \Big[Q'\sin x - Q\cos x\Big]_0^\pi = Q(\pi) + Q(0) = m\,, \end{aligned} \tag{6}$$

con $m \in \mathbb{Q}$ per il punto (ii) del Lemma 2. Ricordando la terza relazione in (4), si ha che $P\sin x$ è una funzione (continua) e strettamente positiva su[4] $(0,\pi)$ e quindi $m > 0$. Ma allora, usando la seconda relazione in (4), per n sufficientemente grande, avremmo

$$0 < m = \int_0^\pi P\sin x \le \pi\,\frac{(q\pi^2/4)^n}{n!} < 1\,,$$

ma questo contraddice il fatto che $m \in \mathbb{Q}$ e quindi l'assunzione che $\pi \in \mathbb{Q}$ è falsa. ∎

---

[3] $D^j x^m = \dfrac{m!}{j!}x^{m-j}$ se $0 \le j \le m$ e $D^j x^m = 0$ per ogni $j > m$, quindi $D^j x^m|_{x=0} = j!$ se $j = m$ e 0 altrimenti.

[4] Si noti che questo fatto segue dalla definizione analitica di π come primo zero del coseno, dalla formula di addizione del coseno, che implica a sua volta la relazione $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$.