Dispense di AM110/Analisi Matematica I- modulo 1

Coerentemente con il diario delle lezioni presente alla pagina del corso:

`http://www.mat.uniroma3.it/users/esposito/corsi/2022-2023/AM110.html`,

si riportano sotto i contenuti di carattere teorico da conoscere ai fini dell'esame orale del corso. Per facilitare la preparazione, per ognuno degli argomenti è riportato un preciso riferimento bibligrafico tratto da

L. Chierchia, *Corso di analisi. Prima parte. Una introduzione rigorosa all'analisi matematica su* $\mathbb{R}$, McGraw-Hill Education 2009, XI+374 pp.

oppure una concisa argomentazione che riassume quanto presentato in maniera estesa a lezione.

<u>Numeri reali</u>

Unione ed intersezione di insiemi (Def. 1.1 e 1.4); dominio e co-dominio di una funzione, funzioni iniettive, suriettive e biunivoche (Def. 1.5); assiomi di $\mathbb{R}$ (par. 1.2); definizione e proprietà del valore assoluto (par. 1.3.1); costruzione di $\mathbb{N}$ come il più piccolo insieme induttivo in $\mathbb{R}$ (Def. 1.20 e Oss. 1.21); principio di induzione (Prop 1.22 e Oss. 1.23); disuguaglianza di Bernoulli (Lemma 1.38); binomio di Newton (Def. 1.42, Lemma 1.43 e Prop. 1.44, solo enunciati); funzione inversa (Def. 1.45 e Oss. 1.46); richiami sulla costruzione dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e razionali $\mathbb{Q}$ a partire dai numeri naturali $\mathbb{N}$ (Def. 1.62 e 1.67); $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Prop. 1.87); proprietà archimedea (Prop. 1.97, solo enunciato); esistenza di $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$:
Dati $A = \{x > 0 : \ x^2 < 2\}$ e $B = \{x > 0 : \ x^2 > 2\}$, abbiamo che $x^2 < 2 < y^2$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$. Siccome $x, y > 0$ otteniamo che $x < y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$. Dall'assioma di completezza sia $s \in \mathbb{R}$ l'elemento separatore di A e B. Siccome $1 \in A$ osserviamo che $s \geq 1 > 0$ ed inoltre $s^2 = 2$, ossia $s = \sqrt{2}$. Infatti, se fosse vero $s^2 < 2$, grazie alla proprietà archimedea avremmo che $(s + \frac{1}{n})^2 = s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leq s^2 + \frac{2s+1}{n} < 2$ per $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{2s+1}{2-s^2}$, giungendo alla contraddizione $s < s + \frac{1}{n} \in A$. Analogamente si puó escludere $s^2 > 2$ e quindi necessariamente vale $s^2 = 2$;
estremo superiore/inferiore in $\mathbb{R}$ (Def. 1.89, Oss. 1.90 e **Def. 2.3**); parte intera e frazionaria (Def. 1.98 e Oss. 1.99); radice n-esima (Teor. 1.103, solo enunciato); funzioni crescenti e decrescenti (Def. 1.114).

<u>Teoria dei limiti</u>

Limite di successione ((2.4)); teorema del confronto (Teor. 2.33, **solo enunciato**); algebra dei limiti (Prop. 2.25, solo enunciato, ristretto a limiti di successioni); algebra dei limiti estesa e forme indeterminate (Prop. 2.27, solo enunciato, e Oss. 2.28, ristretti a limiti di successioni); $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$ per ogni $p \in \mathbb{N}$ e $a > 1$ e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $p \in \mathbb{N}$ e $a > 0$ (Prop. 2.35); $\lim_{n \to +\infty} \frac{(\log n)^p}{n} = 0$ per ogni $p \in \mathbb{N}$:

Sia $x_n \to +\infty$ e $a > 1$. Se $k_n = [x_n]$, abbiamo che $k_n \leq x_n < k_n + 1$ implica

$$\frac{1}{a}\frac{k_n^p}{a^{k_n}} = \frac{k_n^p}{a^{k_n+1}} \leq \frac{x_n^p}{a^{x_n}} \leq \frac{(k_n+1)^p}{a^{k_n}} = a\frac{(k_n+1)^p}{a^{k_n+1}}$$

per monotonia. Siccome k_n e $k_n + 1$ sono delle sottosuccessioni dei numeri naturali che tendono a $+\infty$, da $a > 1$ otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n^p}{a^{k_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(k_n+1)^p}{a^{k_n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

Dal Teorema del confronto otteniamo quindi che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^p}{a^{x_n}} = 0$ per ogni $a > 1$. Applicato a $a = e$ e $x_n = \log n \to +\infty$ fornisce

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^p}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^p}{e^{\log n}} = 0;$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$:
Poiché $a < [a] + 1$, abbiamo che

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]} \cdot \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n-1}\frac{a}{n} \leq \frac{a^{[a]}}{[a]!}\frac{a}{n} \to 0$$

e

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

e quindi la tesi segue dal Teorema del confronto;
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$:
Dato $M > 1$, da $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M^n}{n!} = 0$ otteniamo che $\frac{M^n}{n!} \leq 1$ per n grande, ossia $\sqrt[n]{n!} \geq M$ per $n \geq N$. Per definizione otteniamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$;
validitá dei precedenti limiti notevoli per $0 < p \in \mathbb{R}$:
Siccome $[p] \leq p < [p]+1$, abbiamo che $\frac{n^{[p]}}{a^n} \leq \frac{n^p}{a^n} \leq \frac{n^{[p]+1}}{a^n}$ per monotonia. Essendo $[p], [p]+1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, per $a > 1$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{[p]}}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{[p]+1}}{a^n} = 0$$

e dal Teorema del confronto segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0$. Si procede in modo analogo nel caso degli altri limiti notevoli;
definizione del numero di Nepero (Def. 2.37); punto di accumulazione (Def. 2.13); definizione di limite funzionale (Def. 2.14 e discussione dei casi (i)-(iv)); teorema del confronto (Teor. 2.18, **solo enunciato**); limiti destro/sinistro e relazione con il limite completo (Def. 2.19, Oss. 2.20 e Prop. 2.22, **solo enunciato**); algebra dei limiti (Prop. 2.25, solo enunciato);

algebra dei limiti estesa e forme indeterminate (Prop. 2.27, solo enunciato, e Oss. 2.28); continuità di una funzione (Def. 2.47); algebra delle funzioni continue (Oss. 2.48-(iv)); discussione dei vari tipi di discontinuità (Def. 2.56 e Oss. 2.57); continuità della funzione composta (Prop. 2.58); continuità della funzione inversa (Teor. 2.66, solo enunciato).

Esponenziali e logaritmi

Esponenziali e proprietà degli esponenziali (Def. 3.3 e Prop. 3.4-(i)-(ii)-(iii)-(vi)); continuitá degli esponenziali (Prop. 3.4-(iv)):

Da $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ segue che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[x_n]{a} = 1$ per ogni $x_n \to +\infty$ (dal confronto tra x_n e $k_n = [x_n]$). Dal Teorema ponte otteniamo che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$. Siccome $\lim_{x\to-\infty} a^{\frac{1}{x}} = [\lim_{x\to-\infty} a^{-\frac{1}{x}}]^{-1} = 1$, passando a $\frac{1}{x}$ otteniamo che $\lim_{x\to0^+} a^x = \lim_{x\to0^-} a^x = 1$ e quindi $\lim_{x\to0} a^x = 1$. Infine abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{y\to0} a^y = a^{x_0}$$

mediante il cambio di variabile $y = x - x_0$;

confronto tra ordini di infinito (Prop. 3.4-(vii), provata direttamente usando il Teorema ponte); proprietá delle potenze reali (Oss. 3.5); logaritmi e proprietà dei logaritmi (Def 3.6, Oss. 3.7, Prop. 3.8 da (i) a (viii)); continuitá dei logaritmi (Prop. 3.8-(ix)); confronto tra ordini di infinito (Prop. 3.8-(x), provata direttamente usando il Teorema ponte); grafico di x^α, esponenziali e logaritmi (Fig. 3.1, Fig. 3.2, Fig. 3.3); funzioni iperboliche (par. 3.3); limiti notevoli di esponenziali e logaritmi (par. 3.5 (a)-(g)).

Serie numeriche

Serie geometrica (Esem. 4.1); $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ (Esem. 4.3); serie armonica (Esem. 4.4); convergenza di una serie (Def. 4.6); serie telescopiche (Oss. 4.7); condizione necessaria per la convergenza di una serie (Prop. 4.8-(i)); limite di una successione monotona (Prop. 2.21, solo enunciato, ristretto a limiti di successioni); non convergenza per serie a termini positivi (Prop. 4.8-(v)); criterio della convergenza assoluta (Prop. 4.8-(vi), **solo enunciato**); criterio del confronto e del confronto asintotico (Prop. 4.21); criterio della radice n-esima (Prop. 4.22, Oss. 4.23); relazione tra limite del rapporto e della radice n-esima (Oss. 4.24); criterio del rapporto (Prop. 4.25); criterio di condensazione di Cauchy (Oss. 4.27, Prop. 4.28, **solo enunciato**, e Oss. 4.29); serie armoniche generalizzate (Esem. 4.31 e 4.32); criterio di Leibniz:

Siccome a_n è decrescente, otteniamo che $s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n}$ e $s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n-1}$, ossia s_{2n} è una successione decrescente mentre s_{2n-1} è una successione crescente. Dal Teorema sulla convergenza delle successioni monotone, abbiamo quindi che $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \alpha$ e $\lim_{n\to+\infty} s_{2n-1} = \beta$. Siccome

$$\alpha - \beta = \lim_{n\to+\infty} [s_{2n} - s_{2n-1}] = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$$

per ipotesi, otteniamo che $\alpha = \beta$ e quindi la successione s_n converge a $\alpha = \beta$, ossia la serie è convergente.

Serie esponenziali e funzioni trigonometriche

Richiami sulle funzioni $\sin x$ e $\cos x$: definizione geometrica, 2π-periodicitá, alcuni valori speciali, limiti notevoli di seno e coseno ((5.22), solo enunciato), formule di addizione ((5.24) e (5.36)), formule di duplicazione ((5.37) e (5.42)), continuitá delle funzioni seno e coseno: Dai limiti notevoli di seno e coseno abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} x\frac{\sin x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} [1 - x^2\frac{1-\cos x}{x^2}] = 1.$$

Dalle formule di addizione otteniamo infine che

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \lim_{x\to x_0} [\cos(x-x_0)\sin x_0 + \sin(x-x_0)\cos x_0] = \sin x_0$$
$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \lim_{x\to x_0} [\cos(x-x_0)\cos x_0 - \sin(x-x_0)\sin x_0] = \cos x_0;$$

grafico (Fig. 5.1); richiami sulle funzioni $\mathrm{tg}(x)$ e $\mathrm{ctg}(x)$: definizione geometrica e analitica (Def. 5.21), $\pi-$periodicitá, grafico (Fig. 5.2); funzioni trigonometriche inverse (Prop. 5.22, solo enunciato, par. 5.3).

Topologia

Teorema di Weierstrass (Teor. 6.32 e 6.41, solo enunciati).

Derivate e primitive

Derivabilità di una funzione (Def. 7.1, Oss. 7.2 (i)-(ii)); derivata di alcune funzioni elementari (Esem. 7.3); derivabilità implica continuità (Oss. 7.4); non derivabilità della funzione $|x|$ (Esem. 7.6); punti angolosi e cuspidi (Def. 7.7); regole di derivazione: derivata di somma, prodotto e quoziente (Prop. 7.9, Prop. 7.10, solo enunciati), derivata della composizione e della funzione inversa (Prop. 7.11, Prop. 7.12, solo enunciati); derivata di varie funzioni elementari (Esem. 7.13, tabella 7.1); criterio per determinare i punti di massimo/minimo assoluto per una funzione derivabile su un intervallo chiuso e limitato (Prop. 7.22, solo enunciato, Esem. 7.23); Teorema di Cauchy (Prop. 7.25, solo enunciato); Teorema di Lagrange (Prop. 7.26, solo enunciato) e significato geometrico; legame tra segno della derivata e monotonia e studio dei massimi/minimi relativi (Prop. 7.20, Cor. 7.29); sugli intervalli le funzioni a derivata nulla sono costanti (Cor. 7.27, Oss. 7.28); formula di de L'Hôpital (Teor. 7.31, solo enunciato eccetto caso 1) con dimostrazione); funzione primitiva o integrale indefinito (Def. 7.36, Oss. 7.37-(i)-(ii)-(iii)); primitive di alcune funzioni elementari (tabella

7.2); linearità dell'integrale indefinito (Prop. 7.38); integrazione per parti e cambio di variabile (Prop. 7.40, Prop. 7.41); integrazione di funzioni razionali con il metodo dei fratti semplici (pag. 211-214); derivata seconda (Def. 7.43); legame tra derivata seconda e convessità di una funzione (Prop. 7.55, solo enunciato); funzioni convesse e derivabili due volte su un intervallo giacciono al di sopra di ogni retta tangente al grafico:
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa in I intervallo e $x_0 \in I$. Se f è derivabile due volte, dalla Prop. 7.55 abbiamo che la convessitá di f equivale ad avere $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$, per la quale abbiamo $g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$, $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ e $g''(x) = f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Poiché $g'' \geq 0$, la funzione g' è crescente in I che implica $g'(x) \leq g'(x_0) = 0$ per $x < x_0$ e $g'(x) \geq g'(x_0) = 0$ per $x > x_0$. Quindi in I la funzione g ha un minimo assoluto in x_0: $g(x) \geq g(x_0) = 0$, ossia $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, per ogni $x \in I$;
analisi qualitativa di grafici (par. 7.8); formula di Taylor (Prop. 7.78, Lem. 7.79, Teor. 7.81-(i)-(ii)); sviluppo in serie di Taylor per alcune funzioni elementari (Esem. 7.84-(i), Def. 7.87); sviluppo di Taylor al second'ordine (Prop. 7.75) e criterio per determinare massimi/minimi locali:
Sia f una funzione derivabile due volte in x_0 con $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Dallo sviluppo di Taylor al second'ordine: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ per $x \to x_0$, otteniamo che $f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}[f''(x_0) + o(1)] \geq f(x_0)$ per x vicino a x_0 poiché $f''(x_0) > 0$. La funzione $f(x)$ ha quindi un minimo locale in x_0. Analogamente, se $f''(x_0) < 0$, la funzione $f(x)$ ha un massimo locale in x_0.

Teoria dell'integrazione di Riemann

Integrale definito di una funzione continua: somme di Riemann e interpretazione geometrica (Def. 8.1-(iv)), integrabilitá secondo Riemann (Def. 8.4), integrabilitá delle funzioni continue (Prop. 8.19-(i), solo enunciato); Teorema fondamentale del calcolo integrale (Def. 8.22, Teor. 8.23, solo enunciato, Def. 8.24, Cor. 8.25); proprietá dell'integrale definito (Prop. 8.11-(i)-(iii)-(iv)-(v), dedotti direttamente dal Teorema fondamentale del calcolo); integrazione per parti (Cor. 8.27, Oss. 8.28); integrazione per sostituzione (Cor. 8.29, Oss. 8.30); integrazione di funzioni razionali in seno e coseno:
Se poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$, abbiamo che

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

e quindi

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)dx = \int \mathcal{R}(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$

Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in t che puó essere integrata con il metodo dei fratti semplici;

integrazione di funzioni razionali quadratiche in seno e coseno:
Se poniamo $t = \tan x$, abbiamo che

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

e quindi

$$\int \mathcal{R}(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx = \int \mathcal{R}(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}) \frac{dt}{1+t^2}\Big|_{t=\tan x}.$$

Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in t che puó essere integrata con il metodo dei fratti semplici;
integrazione di radicali in $\frac{ax+b}{cx+d}$:
Se poniamo $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ con $m = mcm(m_1, \dots, m_k)$, abbiamo che

$$\int \mathcal{R}\Big(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_1}{m_1}}, \dots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{n_k}{m_k}}\Big) dx = \int \mathcal{R}\Big(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{\frac{n_1 m}{m_1}}, \dots, t^{\frac{n_k m}{m_k}}\Big)(\frac{dt^m - b}{a - ct^m})' dt\Big|_{t=(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{m}}}$$

poiché $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$. Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in t che puó essere integrata con il metodo dei fratti semplici;
integrazione di radicali in $ax^2 + bx + c$:
Caso $a > 0$: poniamo $ax^2 + bx + c = a(x+t)^2$, ossia $t = \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} - x$, ottenendo

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int \mathcal{R}(\frac{at^2 - c}{b - 2at}, \sqrt{a}\, \frac{-at^2 + bt - c}{b - 2at})(\frac{at^2 - c}{b - 2at})' dt\Big|_{t=\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} - x}$$

poiché $x = \frac{at^2 - c}{b - 2at}$. Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in t che puó essere integrata con il metodo dei fratti semplici.
Caso $a < 0$: affinché $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ abbia senso in qualche regione di $\mathbb{R}$, è necessario che $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Siccome $ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}[1 - \frac{4a^2}{\Delta}(x + \frac{b}{2a})^2]$, poniamo $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \sin t$ ottenendo

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \int \mathcal{R}(\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \sin t - \frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{|a|}} \cos t) \cos t \; dt\Big|_{t=\arcsin[\frac{2|a|}{\sqrt{\Delta}}(x + \frac{b}{2a})]}$$

poiché $t = \arcsin[\frac{2|a|}{\sqrt{\Delta}}(x + \frac{b}{2a})]$. Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in $\sin t$ e $\cos t$ che puó essere integrata utilizzando l'ulteriore cambio di variabile $s = \tan \frac{t}{2}$ oppure $s = \tan t$;
integrale improprio per funzioni continue (Def. 8.37, Oss. 8.38-(v)); integrazione impropria di x^α su $(0,1)$ e su $(1, +\infty)$ (Esem. 8.39); criterio del confronto e del confronto asintotico (Prop. 8.40-(i)-(ii), **solo enunciato**); criterio dell'integrabilità assoluta (Prop. 8.40-(iv), solo enunciato); integrabilità impropria di $\frac{\sin x}{x}$ su $(0, +\infty)$ (Esem. 8.43).

Equazioni differenziali ordinarie

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (par. A.7.1); equazioni a variabili separabili (par. A.7.2); equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine: caso omogeneo (pp. 326-327), soluzione particolare nel caso non omogeneo tramite similarità:

Vogliamo trovare una soluzione particolare $\bar{x}(t)$ dell'equazione $ax'' + bx' + cx = f(t)$, nel caso $f(t)$ abbia la forma speciale $f(t) = e^{\alpha t}[P_1(t)\cos(\beta t) + Q_1(t)\sin(\beta t)]$ con $P_1(t), Q_1(t)$ due polinomi assegnati. Dato il polinomio caratteristico $P(x) = ax^2 + bx + c$, discutiamo solo il caso in cui $\lambda = \alpha + i\beta$ soddisfa $P(\lambda) \neq 0$. Per similaritá cerchiamo la soluzione particolare $\bar{x}(t)$ nella forma:

$$\bar{x}(t) = e^{\alpha t}[P_2(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)]$$

per un'opportuna scelta dei due polinomi $P_2(t), Q_2(t)$ di grado al piú pari al grado massimo tra quello di $P_1(t)$ e $Q_1(t)$. I due polinomi $P_2(t)$ e $Q_2(t)$ sono incogniti e vanno determinati inserendo l'espressione di $\bar{x}(t)$ nell'equazione

e tramite il metodo di variazione delle costanti:

Vogliamo trovare una soluzione particolare $\bar{x}(t)$ dell'equazione $ax'' + bx' + cx = f(t)$ partendo dalla soluzione generale dell'equazione omogenea $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$. Nel metodo di variazione delle costanti introduciamo in c_1 e c_2 una dipendenza dal tempo e cerchiamo $\bar{x}(t)$ nella forma:

$$\bar{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

ove $c_1(t)$ e $c_2(t)$ sono due funzioni incognite da determinare. Se imponiamo $c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0$, abbiamo che $\bar{x}' = c_1x_1' + c_2x_2'$ e $\bar{x}'' = c_1'x_1' + c_1x_1'' + c_2'x_2' + c_2x_2''$, che inseriti nell'equazione forniscono

$$a\bar{x}'' + b\bar{x}' + c\bar{x} = ac_1'x_1' + ac_2'x_2' + c_1(ax_1'' + bx_1' + cx_1) + c_2(ax_2'' + bx_2' + cx_2) = ac_1'x_1' + ac_2'x_2'$$

essendo x_1 e x_2 due soluzioni dell'equazione omogenea. Quindi $\bar{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ sará una soluzione particolare se $c_1(t)$ e $c_2(t)$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0 \\ ac_1'x_1' + ac_2'x_2' = f. \end{cases}$$

Esplicitando c_1' e c_2' abbiamo che

$$c_1'(t) = \frac{f(t)x_2(t)}{a[x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t)]}, \quad c_2'(t) = \frac{f(t)x_1(t)}{a[x_2'(t)x_1(t) - x_1'(t)x_2(t)]}$$

e quindi le due funzioni incognite $c_1(t)$ e $c_2(t)$ vanno determinate per integrazione in t.