

Programma dettagliato AM120 (AA 22-23) - Prof L Chierchia

I riferimenti tra parentesi quadrate sono al testo

[C] Chierchia, L.: *Corso di analisi, prima parte. Una introduzione rigorosa all'analisi matematica su \mathbf{R}* ;

McGraw-Hill, 2019, 390 pagine

* significa: "dimostrazione facoltativa per i fisici" (NB: l'enunciato invece va saputo da tutti!)

** significa: "dimostrazione facoltativa per tutti"

Gli assiomi dei numeri reali. Unicità degli elementi neutri. Unicità di opposto e reciproco.

Teorema: $0 \cdot x = 0$, per ogni x in \mathbf{R} [vedi par 1.2 e 1.3].

Teorema * : $1 > 0$ [Proposizione 1.11, (v)]. Valore assoluto e sue proprietà [par 1.3.1, da (i) a (vi)].

Definizione di \mathbf{N} , \mathbf{Z} e \mathbf{Q} . "Principio di induzione" (Proposizione 1.22).

Proposizione 1.24. Proposizione 1.25*. Corollario 1.26. Proposizione 1.27**. Proposizione 1.28**.

Teorema di ricorsione** e definizioni ricorsive. Esempio: sommatoria.

Definizione di insieme limitato, maggiorante, minorante massimo e minimo. Proposizione 1.27**.

Esempio: $\{x \text{ in } \mathbf{R}: 0 < x < 1\}$ non ha massimo o minimo. Media aritmetica tra due numeri [Definizione 1.18].

Proposizione 1.36. Proposizione 1.37. Esercizio 1.18 svolto. Somme geometriche (Proposizione 1.39 e 1.40).

Definizione di x^n con n intero negativo (e x diverso da 0).

Estremo superiore e inferiore [par 1.6, tutto]. Proposizione 1.95 e 1.97 (proprietà archimedeo).

Parte intera e parte frazionaria di un numero reale. Densità dei razionali in \mathbf{R} .

Coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton.

Teorema sull'esistenza ed unicità delle radici ennesime (Teorema 1.103*).

Potenze con esponente razionale e loro proprietà (Proposizione 1.111).

Definizioni di: retta estesa, intervallo, intorno, punti interni, punti isolati, punti d'accumulazione. [par 2.1, 2.2, 2.3]

Definizione generale di limite. Teorema di permanenza del segno. Proposizione 2.18.

Prima parte del teorema ponte (Proposizione 2.41).

Limiti laterali ed esistenza dei limiti laterali per funzioni monotone [par 2.5].

Algebra dei limiti [par 2.6 tutto; Proposizione 2.28*]

Successioni. Limiti notevoli (par 2.7.1). Numero di Nepero: Lemma 2.36* [tutto fino a par 2.7.2 incluso].

Lemma: per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha: $e (n/e)^n \leq n! \leq e n (n/e)^n$; per $n > 1$, le disuguaglianze sono strette.

Caratterizzazione di sup/inf tramite successioni. Caratterizzazione di punti di accumulazione tramite successioni.

Teorema ponte [par 2.7.3].

Funzioni continue: definizione (ed equivalenza con ε e δ).

Teorema di permanenza del segno per funzioni continue [Par 2.8 fino a Corollario 2.50 escluso].

Punti di discontinuità [Par 2.8.2].

Teorema dell'esistenza degli zeri per funzioni continue su intervalli (dimostrazione "algoritmica").

Teorema di esistenza del "primo zero" per funzioni continue su intervalli.

Teoremi dei valori intermedi per funzioni continue. Le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli [Par 2.8.1].

Limiti di funzioni composte* [par 2.9]. Limiti di funzioni inverse (Proposizione 2.64).

Continuità per funzioni inverse: **Teorema*** *Una funzione strettamente monotona definita su un intervallo reale ha inversa continua*

Proposizione 2.68** . Teorema 2.69.

Continuità di: $|x|$, parte positiva/negativa di x , $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, x^r su $[0,\infty)$, r razionale positivo.

Esponenziali e logaritmi: definizioni e proprietà. Proposizione 3.4* , Proposizione 3.8. [Par 3.1, 3.2]

Limiti notevoli [Par 3.5 incluso Es 3.8]. Funzioni iperboliche e loro inverse [Par 3.3 e 3.4 .

Definizioni e prime proprietà delle serie (Proposizione 4.8),

Criterio del confronto per serie a termini positivi (Proposizione 4.21),

Criterio della radice (Proposizione 4.22), Criterio del rapporto (Proposizione 4.25).

Criterio di Leibniz per serie a segni alterni.

Criterio di condensazione (Proposizione 4.28*) [Par. 4.3]. Definizione analitica di seno e coseno.

Limiti notevoli in 0. Teorema di addizione per il coseno (Teorema 5.10*). Definizione analitica di π greco

Fine della discussione delle proprietà elementari del seno e coseno [tutto Par 5.2.3].

Insiemi finiti e infiniti; cardinalità; numerabilità. \mathbf{N} è infinito (due dimostrazioni). \mathbf{Q} è numerabile.

Sottosuccessioni (successioni estratte). Insieme dei limiti di una successione.

Esempio di una successione con insieme dei limiti uguale a \mathbf{R}^* . Teoremi di Bolzano-Weierstrass ([file](#)).

Successioni di Cauchy [par 6.2 tutto]. Insiemi aperti e insiemi chiusi (topologia standard di \mathbf{R}).

Caratterizzazione degli insiemi chiusi tramite successioni [Lemma 6.23 e Proposizione 6.24].

Chiusura, interno e frontiera di un insieme. Insiemi compatti (per successioni).

Un sottoinsieme di \mathbf{R} è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Sottoinsiemi compatti di \mathbf{R} hanno massimo e minimo.

Le funzioni continue mandano compatti in compatti. Teorema di Weierstrass.

Funzioni uniformemente continue e teorema di Heine-Cantor* . [Par 6.3.2, 6.4.2 e 6.4.4]

Caratterizzazione delle funzioni uniformemente continue su insiemi limitati [Proposizione 6.48 e Corollario 6.52].

Teorema della farfalla [Proposizione 6.49].

Regole di derivazione [Par 7.2, la Proposizione 7.11 è con *].

Teoremi elementari sulle derivate: Fermat, Rolle, Cauchy e Lagrange [Par 7.3]. Corollari di Lagrange (una funzione con derivata nulla su un intervallo è costante; una funzione con derivata limitata su un intervallo è lipschitziana e quindi uniformemente continua).

Teorema di Bernoulli-Hopital. Polinomio e resto di Taylor di ordine n . Teorema di Peano.

Resto in forma di Lagrange* .

Convessità.

Ordine totale tra intervalli disgiunti. Insiemi elementari e loro misura Funzioni a scalini e il

loro integrale

Funzioni integrabili secondo Riemann e il loro integrale

Criterio di integrabilità per partizioni. Integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni monotone [Par 8.14, 8.1.5]

Teorema fondamentale del calcolo [Par 8.2]. Integrali generalizzati o impropri [par 8.3 fino a 8.3.2]

Criteri di integrabilità impropria.

Convergenza uniforme di somme di coseni [vedi registrazione].

$(\sin x)/x$ è una funzione integrabile (ma non assolutamente integrabile) in senso improprio su \mathbf{R} . [Par 8.3 escluso 8.3.3].

Definizione di area. Calcolo dell'area del cerchio di raggio 1.

Integrazione per sostituzione e per parti nell'integrale di Riemann.

Formula di Taylor con resto integrale.

Dimostrazione del teorema di addizione per il coseno (assumendo che si possa scambiare l'ordine delle serie) [Teorema 5.10]

Teorema discreto di Fubini* [Proposizione 5.11] e conclusione della dimostrazione del Teorema 5.10.

Funzioni C infinito non identicamente nulle e a supporto compatto [Proposizione 8.36**]

Irrazionalità del numero di Nepero e e di pi greco**

Non numerabilità di \mathbf{R} (due dimostrazioni**). Espansioni decimali**.

La funzione di van der Waerden: un esempio di funzione continua mai derivabile**