Criterio di Leibniz per serie a segni alterni

(23/9/2023)

Proposizione 1 *Sia* $\{a_n\}$ *una successione decrescente con* $\lim a_n = 0$. *Allora la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *converge (ad un numero non negativo).*

Dimostrazione Si considerino le somme parziali pari e dispari date da:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \, ,$$

$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}) \, ,$$

e si noti che (poiché $\{a_n\}$ è decrescente) i numeri tra parentesi sono non negativi. Quindi: $s_{2n} \geq 0$; $\{s_{2n}\}$ è crescente; $\{s_{2n+1}\}$ è decrescente. Inoltre $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ e dunque $s_{2n} \leq s_{2n+1}$. In particolare $0 \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq a_1$. Dunque (per il teorema sui limiti delle funzioni monotone)

$$0 \leq \lim s_{2n} = \sup s_{2n} \leq \inf s_{2n+1} = \lim s_{2n+1} \leq a_1 \, ,$$

e poiché $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ e $\lim a_{2n+1} = 0$, si ha che $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1}$ e da questo segue la tesi. $\blacksquare$

Esercizio Si dimostri che data una successione $\{a_n\}$ se $\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = L \in \mathbb{R}^*$, allora $\lim a_n = L$.