

Zeri di funzioni continue

Teorema (“Esistenza degli zeri per funzioni continue”) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione Chiaramente, basta considerare il caso $f(a) > 0 > f(b)$ (altrimenti si consideri $-f$ al posto di f).

Definiamo ricorsivamente due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ come segue:

$a_1 := a, b_1 := b$ e se $n \geq 1$ definiamo $c_n := (a_n + b_n)/2$ e

$$\text{se } f(c_n) > 0, \text{ allora } \begin{cases} a_{n+1} := c_n \\ b_{n+1} := b_n \end{cases} \quad (\text{i})$$

$$\text{se } f(c_n) < 0, \text{ allora } \begin{cases} a_{n+1} := a_n \\ b_{n+1} := c_n \end{cases} \quad (\text{ii})$$

$$\text{se } f(c_n) = 0, \text{ allora } a_{n+1} := b_{n+1} := c_n. \quad (\text{iii})$$

Ci sono due casi: o esiste $n \geq 2$ tale che $f(c_n) = 0$ oppure $f(c_n) \neq 0$ per ogni n .

Nel primo caso, poniamo $x_0 = c_n$ e il teorema è dimostrato.

Nel secondo caso, si ha che $\{a_n\}$ è crescente, $\{b_n\}$ è decrescente; per ogni $n, f(a_n) > 0 > f(b_n)$;

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^n} \quad (1)$$

(la seconda uguaglianza segue immediatamente per induzione). In particolare $a_n < b_n$ per ogni n e quindi $a_n < b_m$ per ogni n ed¹ m . Dal teorema sull'esistenza dei limiti per successioni monotone e dal teorema del confronto segue che

$$\lim a_n = \sup a_n =: \alpha \leq \beta := \inf b_n = \lim b_n. \quad (2)$$

Ma allora

$$\beta - \alpha = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) \stackrel{(1)}{=} \lim \frac{b - a}{2^{n-1}} = 0.$$

Poniamo ora $x_0 = \alpha = \beta$. Per continuità si ha che $f(x_0) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$. Ma poiché $f(a_n) \geq 0$ si deve avere (teorema del confronto) $f(x_0) \geq 0$ e poiché $f(b_n) \leq 0$ si deve avere $f(x_0) \leq 0$ il che implica che $f(x_0) = 0$. ■

Corollario (“Esistenza del primo zero per funzioni continue”) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$ e tale che $f(x) \cdot f(a) > 0$ per ogni $x \in [a, x_0)$.

Dimostrazione Sia $E := \{\bar{x} \in (a, b) \mid f(\bar{x}) = 0\}$. Per il teorema $E \neq \emptyset$ (e per definizione $E \subseteq (a, b)$ ed è quindi limitato). Sia $x_0 = \inf E \geq a$. Dalla caratterizzazione per successioni dell'estremo inferiore segue che esiste una successione $x_n \in E$ tale che $x_n \rightarrow x_0$ e per continuità si ha che $f(x_0) = \lim f(x_n)$, ma essendo $f(x_n) = 0$ per ogni n segue che $f(x_0) = 0$, ossia $x_0 \in E$ è il minimo di E . In particolare $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, x_0)$, ma allora $f(x)$ deve avere lo stesso segno di $f(a)$ (altrimenti per il teorema si avrebbe uno zero tra a e $x < x_0$ contraddicendo la minimalità di x_0). ■

¹Se $n < m$, allora $a_n \leq a_m < b_m$ e se $n > m$, allora $a_n < b_n \leq b_m$.