Es 1 [Pt 26] Discutere la convergenza, delle seguenti serie numeriche:

(i) [8pt] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^2}$; (ii) [8pt] $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1+n^4}{2^{n/2}}$; (iii) [10 pt] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{(\log n)^n}$.

Es 2 [Pt 20] Discutere la convergenza, al variare del parametro reale x , della serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n}$.

Es 3 [Pt 20] Discutere la convergenza, al variare del parametro reale x , della serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh x^n}{\log \sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{x^n+n^2} \right)$

Es 4 [Pt 12] Dato $M > 0$, trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n^4-7}{n^3+1} > M$ per ogni $n \geq N$.

Es 5 [Pt 12] Sia $f(x) = \frac{||x|-1|}{x^4+3x^{10}}$ e $x_0 = -1$. Dato $\varepsilon > 0$ trovare δ tale che $|f(x)| < \varepsilon$ per ogni $|x-x_0| < \delta$.

Es 6 [Pt 10] Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n} + \log n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che vale la disuguaglianza stretta per $n \geq 2$.

Soluzioni

Es 1 (i) Diverge: per il criterio di Cauchy $\sum \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^2} \approx \sum \frac{2^{n/2}}{n^2} = +\infty$ (crit. radice: $\left(\frac{2^{n/2}}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{2} > 1$); oppure, essendo

$\log n < n^{1/4}$, definitivamente si ha che, per m sufficientemente grande $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^2} \geq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(ii) Converge: per confronto asintotico $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1+n^4}{2^{n/2}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^{n/2}} < +\infty$ (crit. radice: $\left(\frac{n^4}{2^{n/2}}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1/\sqrt{2} < 1$).

(iii) Converge: per crit radice, $\left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{(\log n)^n}\right)^{1/n} \rightarrow 0$.

Es 2 La serie è a termini positivi. Per $x = \pm 1$, $\sum \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n} \approx \sum \frac{1}{n} = +\infty$. Per $|x| < 1$, $\sum \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n} \approx \sum \frac{x^{2n}}{n} < +\infty$

(crit radice). Per $x > 1$, $\sum \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n} \approx \sum \frac{1}{n^{x-1}} < +\infty$ se e solo se $x > 2$. Per $x < -1$, $\sum \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n} \approx \sum 1 = +\infty$.

In definitiva la serie converge se e solo se $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

Es 3 Studiamo separatamente le due serie. Per $|x| > 1$, $\left|\frac{\sinh x^n}{\log \sqrt{n}}\right| \rightarrow +\infty$ (e la serie non converge). Per $|x| < 1$, $\sum \frac{|\sinh x^n|}{\log \sqrt{n}} \approx$

$\sum \frac{|x|^n}{\log n} < +\infty$ (crit radice). Per $x = 1$ la serie diverge e per $x = -1$ converge condizionatamente per Leibniz. Quindi la prima serie, converge assolutamente per $|x| < 1$, converge condizionatamente per $x = -1$ e non converge altrimenti.

Passiamo alla seconda serie. Per $|x| \leq 1$, $\sum \left|\frac{\sqrt{n}}{x^n+n^2}\right| \approx \sum \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$. Per $|x| > 1$, $\sum \left|\frac{\sqrt{n}}{x^n+n^2}\right| \approx \sum \frac{\sqrt{n}}{|x|^n} < +\infty$ (crit radice). Quindi la seconda serie converge assolutamente per ogni x e il comportamento della serie completa è come quello della prima serie.

Es 4 $\frac{n^4-7}{n^3+1} > M \iff n^3(n-M) > 7+M$ e si può prendere $N = M+7$: infatti se $n \geq M+7$, allora $n^3(n-M) > n^3 > n \geq M+7$.

Es 5 Si può prendere $\delta = \min\{1/2, \varepsilon/16\}$. Infatti, ponendo $y = -x$ e $y_0 = 1$, si ha $|f(x)| = |f(-y)| < \frac{|y|-1}{y^4} < 16(|y|-1) \leq 16|y-1| < \varepsilon$ (si noti che $y > 1/2$ se $|y-1| < 1/2$).

Es 6 (svolto in classe).