☐ **II Esonero** *oppure* ☐ **Pre–appello** (*barrare una sola casella*) – **AM120-ANALISI MATEMATICA 2 – (AA 2023/24) 3/6/2024**

Nome, Cognome e numero di matricola:

Pre–appello: Es 1,2,3,4,5,6 (Ridotto: Es 1,2,3). **II Esonero:** Es 2,3,4 + Es 7,8,9 (Ridotto: Es 2,3,7)

Es 1 [Pt 30] Discutere la convergenza delle seguenti serie, al variare di $x \in \mathbb{R}$:

(i) [12 pt] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{e^{nx}+1}$; (ii) [18 pt] $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{x^{2n}+n^{2x}}{e^{nx}+1} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}} \Big)$.

Es 2 [Pt 24] Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dei seguenti integrali impropri:

(i) [14 pt] $\displaystyle\int_0^1 |\log x|^\alpha \, dx$; (ii) [10 pt] $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x + x^\alpha \tan \frac{1}{x^4}} \, dx$.

Es 3 [Pt 12] Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'uniforme continuità della funzione $f(x) = x^\alpha \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ su $(0 + \infty)$.

Es 4 [Pt 14] Sia $f(x) = \{x\} \cdot \{1-x\}$ (dove $\{\cdot\}$ è la parte frazionaria) e sia $a_n = f\big(\frac{1}{2} + \frac{n^2}{3}\big)$. Determinare $\overline{\lim}\, a_n$ e $\underline{\lim}\, a_n$.

Es 5 [Pt 10] Determinare il più piccolo $N \in \mathbb{N}$ tale che $2^n \ge n^2 + 6$ per ogni $n \ge N$.

Es 6 [Pt 10] Dato $M > 0$, trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{2^n}{n} > M$ per ogni $n \ge N$.

Es 7 [Pt 30] Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri (al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, se presente):

(i) [20 pt] $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^x}{(\operatorname{sen} \pi x)^\alpha} \, dx$; (ii) [10 pt] $\displaystyle\int_0^\infty |\operatorname{sen} x| \arctan x^2 \, dx$

Es 8 [Pt 10] Dimostrare che $\sin(1/2) < 0,48$.

Es 9 [Pt 10] Trovare una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che: (i) per ogni $a > 0$, $f \cdot \chi_{(0,a)}$ è a scalini; (ii) $\sup_{(0,+\infty)} f = +\infty$, $\inf_{(0,+\infty)} f = -\infty$; (iii) $\displaystyle\int_0^\infty f$ converge; (iv) $\displaystyle\int_0^\infty |f| = +\infty$.

Soluzioni

Es 1 (i): La serie è a termini non negativi. Dal criterio della radice: $\lim \Big(\dfrac{x^{2n}}{e^{nx}+1} \Big)^{1/n} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$ e quindi la serie converge se $x > -1$ e diverge altrimenti.

(ii) Poiché $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$ è convergente (per Leibniz) basta studiare il comportamento di $\sum \frac{x^{2n}+n^{2x}}{e^{nx}+1} = \sum \frac{x^{2n}}{e^{nx}+1} + \sum \frac{n^{2x}}{e^{nx}+1}$ (l'uguaglianza vale in ogni caso perché i temini sono positivi). La prima serie è quella di (i). La seconda converge (radice) se $x > 0$; se $x = 0$ diverge; se $x < 0$, per confronto asintotico, si comporta come $\sum n^{2x}$ che converge se e solo se $x < -1/2$. In definitiva, la serie completa converge su $(-1, -1/2) \cup (0, +\infty)$ e diverge altrimenti.

Es 2 (i) $\displaystyle\int_0^{1/2} |\log x|^\alpha \, dx = \int_2^\infty (\log t)^\alpha t^{-2} dt < +\infty$ per ogni α. $\displaystyle\int_{1/2}^1 |\log x|^\alpha \, dx \approx \int_{1/2}^1 (1-x)^\alpha \, dx = \int_0^{1/2} t^\alpha \, dt < +\infty$ se e solo se $\alpha > -1$. In definitiva, l'integrale è convergente se e solo $\alpha > -1$.

(ii) Per $0 < \alpha \le 5$, l'integrando si comporta come c/x, con $c > 0$ e l'integrale diverge; per $x > 5$ l'integrando si comporta come $1/x^{\alpha-4}$ e l'integrale converge. In definitiva, l'integrale converge se e solo se $x > 5$.

Es 3 Su $(0, 1]$ f è uniformemente continua se e solo se esiste il il limite per $x \to 0$ ossia se e solo se $\alpha > 0$. Se $\alpha > 2$ $f \sim x^{\alpha-1}$ vicino a $+\infty$ e quindi non è uniformemente continua (crescendo più che linearmente). Se $0 < \alpha \le 2$, f' è limitata e dunque f è lipschitziana in $[1, +\infty)$. In definitiva f è uniformemente continua su $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha \in (0, 2]$.

Es 4 f è una funzione continua di periodo 1, dunque $a_{n+3} = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; $\{a_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{1/4, 5/36\}$. Quindi, $\underline{\lim}\, a_n = 5/36 = \lim a_{1+3k}$; $\overline{\lim}\, a_n = 1/4 = \lim a_{3k}$.

Es 5 $N = 5$. Infatti, per $n \le 4$, $2^n < n^2 + 6$ e $2^5 > 5^2 + 6$. Assumiamo ora (induzione) che $2^n \ge n^2 + 6$ con $n \ge 5$; allora $2^{n+1} \ge 2 \cdot (n^2+6) = 2n^2 + 12$ e $2n^2 + 12 > (n+1)^2 + 6 \iff n^2 - 2n + 5 > 0$ il che è sempre vero (essendo $n^2 - 2n + 5 = (n-1)^2 + 1$).

Es 6 Per l'Es 5, $2^n > n^2$ per $n \ge 5$. Dunque se $N = \max\{M, 5\}$, $2^n/n > M$.

Es 7 (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^x}{(\operatorname{sen} \pi x)^\alpha} \, dx \approx \int_0^1 \frac{|x \log x|}{(\operatorname{sen} \pi x)^\alpha} \, dx$. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{|x \log x|}{(\operatorname{sen} \pi x)^\alpha} \, dx \approx \int_0^{1/2} x^{1-\alpha} |\log x| \, dx = \int_2^\infty \frac{\log t}{t^{3-\alpha}} dt$, che converge se e solo se $3 - \alpha > 1$, ossia, $\alpha < 2$. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{|x \log x|}{(\operatorname{sen} \pi x)^\alpha} \, dx \approx \int_{1/2}^1 \frac{1-x}{(1-x)^\alpha} dx = \int_0^{1/2} t^{1-\alpha} dt < +\infty$ se e solo se $\alpha < 2$. Quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha < 2$.

(ii) L'integrale diverge: per $n \ge 1$, sia $I_n = \big[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3}{4}\pi\big]$ e $f = c \displaystyle\sum_{n \ge 1} \chi_{I_n}$ con $c = (\arctan \pi)/\sqrt{2}$. Allora, per ogni $x \ge \pi$, $|\operatorname{sen} x| \arctan x^2 > f(x)$ e $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} f \ge (n-1) c\pi/2 \to +\infty$.

Es 8 $\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6}\Big(1 - \frac{x^2}{20}\Big)$ per ogni $0 < x < \sqrt{20}$; se $x = 1/2$, si ha $\operatorname{sen} \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \frac{79}{80} < \frac{1}{2} - \frac{1}{50} = 0,48$.

Es 9 Possiamo prendere, ad esempio, $I_n := [n, n + 1/n^2]$ e $f = \sum_{n \ge 1} (-1)^n n \chi_{I_n}$.