Funzioni continue e intervalli

Proposizione 1[1] *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Allora f è monotòna.*

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che f non sia monotòna. Allora[2] esistono tre punti in I, $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_2)$ non è compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$: più precisamente, se poniamo

$$y_i := f(x_i)\,, \qquad \bar{y}_1 := \min\{y_1, y_3\}\,, \quad \bar{y}_3 := \max\{y_1, y_3\}\,,$$

allora $y_2 \notin [\bar{y}_1, \bar{y}_3]$, cioè vale una delle seguenti alternative

$$\text{(i)} \quad y_2 < \bar{y}_1\,, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \bar{y}_3 < y_2\,.$$

Nel caso (i), scegliamo $\bar{y} \in (y_2, \bar{y}_1)$. Allora (dalla definizione di $\bar{y}_1$) si ha che $y_2 < \bar{y} < y_1$ e $y_2 < \bar{y} < y_3$. Quindi per il teorema del valor medio[3] e dall'iniettività di f segue che esistono $\bar{x}_1 \in (x_1, x_2)$ e $\bar{x}_2 \in (x_2, x_3)$ tali che $f(\bar{x}_1) = \bar{y} = f(\bar{x}_2)$ ma questo contraddice l'iniettività di f essendo $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$.
Nel caso (ii), scegliamo $\bar{y} \in (\bar{y}_3, y_2)$. Allora (dalla definizione di $\bar{y}_3$) si ha che $y_1 < \bar{y} < y_2$ e $y_3 < \bar{y} < y_2$. Come sopra, per il teorema del valor medio e dall'iniettività di f segue che esistono $\bar{x}_1 \in (x_1, x_2)$ e $\bar{x}_2 \in (x_2, x_3)$ tali che $f(\bar{x}_1) = \bar{y} = f(\bar{x}_2)$ ma questo contraddice l'iniettività di f essendo $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$. ∎

Ovviamente, nell'ipotesi della Proposizione 1 (essendo f iniettiva) f è *strettamente* monotòna.

Facciamo ora un'osservazione elementare sulle funzioni monotòne:

Lemma *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna e supponiamo che f non sia continua in $x_0 \in A$. Allora $f(A)$ non è un intervallo.*

Dimostrazione Possiamo assumere che f sia crescente (altrimenti consideriamo $-f$ al posto di f). Poiché f non è continua in x_0, x_0 non è un punto isolato di A e quindi, poiché i limiti laterali delle funzioni monotòne esistono sempre, si deve avere o $\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq f(x_0)$ o $\lim_{x \to x_0+} f(x) \neq f(x_0)$. Nel primo caso si ha $\alpha := \lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup_{x \in A, x < x_0} f < f(x_0)$, ma questo significa che l'intervallo $\big(\alpha, f(x_0)\big) \subseteq f(A)^c$ e quindi $f(A)$ non è un intervallo. Nell'altro caso il ragionamento è analogo. ∎

Poiché l'inversa di una funzione strettamente monotòna è strettamente monotòna, segue immediatamente

Proposizione 2[4] *Una funzione strettamente monotòna su un intervallo ha inversa continua.*

Infine, dalle Proposizioni 1 e 2 e dal fatto che funzioni continue mandano intervalli in intervalli (teorema del valor medio[5]) segue

Proposizione 3 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e continua. Allora, la funzione inversa di f, f^{-1}, è una funzione continua definita sull'intervallo $J = f(I)$ e immagine I.*

---

[1] Cfr. Proposizione 2.68

[2] **Esercizio***: f è monotòna se e sole se comunque scelti tre punti del dominio $x_1 < x_2 < x_3$ si ha che $f(x_2)$ è compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$.

[3] Teorema 2.53–(ii) applicato prima all'intervallo $[x_1, x_2]$ e poi all'intervallo $[x_2, x_3]$.

[4] Cfr. Teorema 2.66.

[5] Vedi, in particolare, Corollario 2.54.