1 L'integrale di Riemann su $\mathbb{R}$

D'ora in avanti *considereremo l'insieme vuoto un intervallo (limitato).*

Osservazione 1.1 (i) Si ricorda che *l'intersezione di due intervalli è un intervallo e che l'unione di due intervalli è un intervallo (se l'intersezione è non vuota o uno dei due intervalli è l'insieme vuoto) o l'unione disgiunta di due intervalli.*

(ii) *Il complementare di un intervallo è un intervallo o unione di due intervalli disgiunti.*

(iii) *Se I e J sono intervalli disgiunti non vuoti allora o $I \le J$ o $J \le I$.*

Dimostrazione* Sia $a = \inf I$, $b = \sup I$ e sia $y \in J$. Poiché I e J sono disgiunti $y \notin (a, b)$ e quindi si deve avere o $y \ge b$ o $y \le a$. Supponiamo $y \ge b$ (il caso $y \le a$ si tratta in modo analogo). In tal caso si ha $J \ge I$: infatti sia $y' \in J$, se fosse $y' < b$ allora (dalla definizione di estremo superiore) seguirebbe che esiste $x' \in I$ tale $y' < x'$, e quindi $y' < x' \le b \le y$, che implica che $x' \in J$ contraddicendo l'ipotesi che I e J sono disgiunti. Dunque $y' \ge b$. ∎

1.1 Insiemi elementari

Definizione 1.2 *Un insieme elementare $E \subseteq \mathbb{R}$ è una unione finita di intervalli limitati disgiunti*[1]. *La famiglia degli insiemi elementari si denota $\mathscr{E} := \mathscr{E}(\mathbb{R})$; più in generale, $\mathscr{E}(I)$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ denota la famiglia degli insiemi elementari contenuti in I.*

Lemma 1.3 *Sia $E = \bigcup_{1 \le k \le n} I_k$ con I_k intervalli. Allora esistono $m \le n$ intervalli I'_k a due a due disgiunti tali che $E = \bigcup_{1 \le k \le m} I'_k$; in particolare, se gli I_k sono limitati, $E \in \mathscr{E}$.*

Dimostrazione* Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ la tesi è vera con $m = n = 1$ e $I'_1 = I_1$. Assumiamo la tesi vera per $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamola per $n + 1$. Se $I_{n+1} \cap I_k = \varnothing$ per ogni $1 \le k \le n$ la tesi segue direttamente dall'ipotesi induttiva (con $m \le n + 1$). Se esiste $j \le n$ tale che $I_{n+1} \cap I_j \ne \varnothing$, allora $\tilde{I}_j := I_j \cup I_{n+1}$ è un intervallo e la tesi segue dall'ipotesi induttiva applicata agli n intervalli I_k con k tale che $j \ne k \le n$ e $\tilde{I}_j$ (in questo caso, $m \le n$). ∎

Notazione Se $E = \cup A_j$ con A_j disgiunti ($A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \ne j$) scriveremo $E = \dot\cup A_j$.

Proposizione 1.4 *Se $A, B \in \mathscr{E}(I)$, allora $A \cap B$, $A \cup B$, e $A \backslash B$ appartengono a $\mathscr{E}(I)$.*

Dimostrazione* Siano $A = \dot\cup I_j$ e $B = \dot\cup J_k$ con I_j e J_k intervalli in[2] I. Allora, $A \cup B = \bigcup_{j,k} I_j \cup J_k$ e quindi (Lemma 1.3) $A \cup B \in \mathscr{E}(I)$. Inoltre,

$$A \cap B = \dot{\bigcup_{j,k}} I_j \cap J_k \in \mathscr{E}(I) \,. \tag{1}$$

Infine,

$$A \backslash B = (\dot\cup_j I_j) \cap (\dot\cup_k J_k)^c = (\dot\cup_j I_j) \cap (\cap_k J_k^c) = \dot\cup_j (I_j \cap_k J_k^c) \,. \tag{2}$$

Per l'Osservazione 1.1–(ii), $I_j \cap_k J_k^c$ è unione di intervalli (contenuti in I_j) e dunque, da (2) e dal Lemma 1.3, segue che

$$A \backslash B = \dot{\bigcup_{j,i}} I_{ji} \in \mathscr{E}(I) \,, \qquad I_{ji} \subseteq I_j \backslash B \,. \quad ∎ \tag{3}$$

[1] Ossia, $E = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ con I_j intervalli limitati tali che $I_j \cap I_k = \varnothing$ se $j \ne k$.

[2] Gli indici variano su insiemi finiti