1.2 Funzioni a scalini

Definizione 1.5 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ a scalini è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche*[3] *di intervalli in I limitati e disgiunti, ossia,*

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}\,,\ I_j \text{ intervallo limitato}\,,\ I_j \subseteq I\,,\ I_j \cap I_k = \varnothing\,,\ \forall j \neq k\,; \tag{4}$$

l'insieme di tali funzioni si denota $S(I)$ e poniamo $S := S(\mathbb{R})$; l'identità (4) è una 'rappresentazione standard' di $f \in S(I)$.

Osservazione 1.6 (i) Ovviamente, la rappresentazione standard di una funzione a scalini non è unica ad esempio:

$$\chi_{[0,1]} = 2\chi_{[0,1/2)} - \chi_{[0,1]} + 2\chi_{[1/2,1]}\,.$$

(ii) Se $f \in S(I)$ è come in (4), $E := \dot\cup I_j \in \mathscr{E}(I)$ e $f(x) = 0$ se $x \notin E$. In particolare le funzioni a scalini sono nulle al di fuori dell'intervallo limitato $[\inf E, \sup E]$.

Nel resto di questo capitolo, I denota un intervallo fissato in $\mathbb{R}$ (ad esempio $I = \mathbb{R}$) o $I = [0,1)$).

Lemma 1.7 *Se $f, g \in S(I)$, esistono intervalli disgiunti e limitati $I_i \subseteq I$, $1 \le i \le n$, e numeri reali α_i e β_i tali che*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{I_i}\,, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{I_i}\,. \tag{5}$$

Il punto di questo lemma è che gli intervalli che appaiono nelle rispettive rappresentazioni standard delle funzioni f e g *possono essere presi uguali*.
Dimostrazione* Essendo $f, g \in S(I)$, esistono: p intervalli disgiunti $E_j \subseteq I$, p numeri reali γ_j, q intervalli disgiunti $J_k \subseteq I$ e q numeri reali δ_k, tali che

$$f = \sum_j \gamma_j \chi_{E_j}\,, \qquad g = \sum_k \delta_k \chi_{J_k}\,.$$

Siano A e B gli insiemi elementari dati da $A = \dot\cup_j E_j$ e $B = \dot\cup_k J_k$. Dalla Proposizione 1.4 (vedi, in particolare, (1) e (3)) segue che

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B)\dot\cup(A\backslash B)\dot\cup(B\backslash A) \\ &= \big(\dot{\bigcup_{j,k}} E_j \cap J_k\big)\ \dot\cup\ \big(\dot{\bigcup_{j,i}} E_{ji}\big)\ \dot\cup\ \big(\dot{\bigcup_{k,\ell}} J_{k\ell}\big) \end{aligned}$$

con E_{ji} intervalli (disgiunti) contenuti in $E_j\backslash B$ e $J_{k\ell}$ intervalli (disgiunti) contenuti in $J_k\backslash A$. La famiglia di intervalli $\mathscr{F} := \{E_j \cap J_k\} \cup \{E_{ji}\} \cup \{J_{k\ell}\}$ è una famiglia finita di intervalli a due a due disgiunti contenuti in I e su ognuno di tali intervalli le funzioni f e g sono costanti e assumono i seguenti valori[4]:

$$\begin{cases} f|_{E_j \cap J_k} = \gamma_j \\ \\ g|_{E_j \cap J_k} = \delta_k \end{cases}, \qquad \begin{cases} f|_{E_{ji}} = \gamma_j \\ \\ g|_{E_{ji}} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} f|_{J_{k\ell}} = 0 \\ \\ g|_{E_{k\ell}} = \delta_k \end{cases}. \tag{6}$$

Poiché f e g sono nulle fuori da $A \cup B$ l'asserto segue ponendo[5] $\{I_i\} = \mathscr{F}$ e definendo di conseguenza secondo la (6) i numeri α_i e β_i. ∎

Da questo lemma segue immediatamente la seguente

[3] Si ricorda che la funzione caratteristica (o indicatrice) di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è la funzione $x \to \chi_A(x)$ definita come $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$; in particolare $\chi_\varnothing$ è la funzione identicamente nulla.

[4] Se $f : A \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$, la funzione $f|_B$ è la funzione f ristretta sull'insieme B, ossia, la funzione $f|_B : B \to \mathbb{R}$ tale che $f|_B(x) = f(x)$ per ogni $x \in B$.

[5] Ossia, $I_1, \ldots, I_n$ è una numerazione dell'insieme finito $\mathscr{F}$ di cardinalità n.

Proposizione 1.8 *Se $f, g \in S(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora appartengono a $S(I)$ anche le funzioni $af + bg$, fg, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f^{\pm}$ e $|f|$.*

Dimostrazione Siano f, g come in (5), allora

$$af + bg = \sum_{j=1}^{n}(a\alpha_j + b\beta_j)\chi_{I_j}\,,\quad fg = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j\beta_j)\chi_{I_j}\,,\quad \max\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n}\max\{\alpha_j,\beta_j\}\chi_{I_j}\,,$$
$$\min\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n}\min\{\alpha_j,\beta_j\}\chi_{I_j}\,,\,,\quad f^{\pm} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{\pm}\chi_{I_j}\,,\quad |f| = \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\chi_{I_j}\,. \quad \blacksquare$$

Esercizio 1 Si dimostri che $\sqrt{2}\chi_{[0,5)} - \chi_{(-1/2,1/2)} + 7\chi_{(3,2\pi)}$ è una funzione a scalini.

Esercizio 2 Siano $f = -2\chi_{[-3,-2)} + 5\chi_{(1,\sqrt{2}]}$, $g = \sum_{i=1}^{5}(-1)^i\chi_{(-4+i,-3+i)}$. Si determinino n, I_i, α_i e β_i tali che valga la (5).

Definizione *La rappresentazione (4) di una funzione a scalini f non identicamente nulla si dice* **minimale** *se gli α_i sono tutti non nulli; se gli intervalli disgiunti I_i sono ordinati ($I_i \le I_{i+1}$) , e se $I_i \cup I_{i+1}$ per qualche i è un intervallo, allora $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.*

Esercizio 3 Trovare rappresentazioni minimali per le funzioni a scalini degli esercizi 1 e 2.

Esercizio 4* Dimostrare che la rappresentazione minimale di una funzione a scalini non nulla è unica.

1.3 Misura di insiemi elementari

Cominciamo col definire la misura (o lunghezza) di un intervallo:

Definizione 1.9 *Sia I un intervallo. Chiamiamo lunghezza o misura (unidimensionale) I l'elemento di $\mathbb{R}^*$ dato da*

$$|I| := \begin{cases} 0\,, & \text{se } I = \varnothing\,; \\ +\infty\,, & \text{se } I \text{ non è limitato}\,; \\ \sup I - \inf I\,, & \text{se } \varnothing \neq I \text{ è limitato}\,. \end{cases} \tag{7}$$

A volte si usano i simboli $\ell(I)$ o $\mathrm{mis}_1(I)$ al posto di $|I|$.

Osservazione 1.10 (i) La lunghezza di un punto (o meglio di un singleton $I = \{a\} = [a,a]$) è zero.

(ii) Si noti anche che la definizione di lunghezza non dipende dal fatto che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.

Lemma 1.11 *Sia I un intervallo limitato, $n \ge 2$ e $I_1, ..., I_n$ intervalli tali che $I = \dot\cup I_k$. Allora*

$$|I| = \sum_{k=1}^{n}|I_k|\,. \tag{8}$$

Dimostrazione Poiché gli intervalli I_k sono disgiunti, per il punto (iii) dell'Osservazione 1.1 possiamo assumere che $I_1 \le \cdots \le I_n$. Siano $a_k = \inf I_k \le b_k = \sup I_k$ per ogni $1 \le k \le n$, $a = \inf I = a_1$ e $b = \sup I = b_n$. Poniamo anche $a_{n+1} := b_n = b$. Poichè $I = \dot\cup I_k$ (e I è un intervallo), si deve avere $a_{k+1} = b_k$ per ogni $1 \le k \le n$ e quindi

$$|I| = b - a = a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n}|I_k|\,. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.12 *Siano I_j e J_k intervalli limitati con $1 \le j \le n$ e $1 \le k \le m$ tali che $E = \dot\cup I_j = \dot\cup J_k$. Allora $\sum |I_j| = \sum |J_k|$.*

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che per ogni j e k si ha $I_j = \dot\cup_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot\cup_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 1.11 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$. Quindi,

$$\sum_j |I_j| = \sum_j \sum_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j |I_j \cap J_k| = \sum_k |J_k| \,. \qquad \blacksquare$$

Questo lemma permette di dare la definizione di misura di un insieme elementare:

Definizione 1.13 *Sia $E \in \mathcal{E}$. Allora $|E| := \mathrm{mis}_1(E) := \sum |I_k|$ dove $E = \dot\cup I_k$ $(1 \le k \le n)$.*

Si noti che il numero $|E|$ per il Lemma 1.12 dipende solo dall'insieme elementare E e *non* dal particolare modo in cui vene rappresentato come unione disgiunta di intervalli.

1.4 Integrale di funzioni a scalini

Lemma 1.14 *Sia $f \in S(I)$ e siano*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{J_k} = f \tag{9}$$

due sue rappresentazioni standard. Allora,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j| = \sum_{k=1}^{m} \beta_k |J_k| \,. \tag{10}$$

Dimostrazione* Possiamo assumere che $\alpha_j \neq 0 \neq \beta_k$ per ogni j e k (dato che se sono zero non contribuiscono alle somme in (10)). In tal caso

$$E := \dot\cup_j I_j = \dot\cup_k J_k = \{x \in \mathbb{R} \big| \, f(x) \neq 0\} \,.$$

Ora[6], per ogni j e k si ha $I_j = \dot\cup_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot\cup_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 1.11 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$; inoltre, se $I_j \cap J_k \neq \varnothing$ si deve avere $\alpha_j = \beta_k$ (essendo il valore di f su $I_j \cap J_k$), mentre se $I_j \cap J_k = \varnothing$, allora $|I_j \cap J_k| = 0$. Quindi,

$$\sum_j \alpha_j |I_j| = \sum_j \sum_k \alpha_j |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j \alpha_j |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j \beta_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \beta_k |J_k| \,. \qquad \blacksquare$$

Grazie a tale lemma la seguente definizione è ben posta:

Definizione 1.15 *Se $f \in S(I)$ chiamiamo integrale di f su I il seguente numero reale*

$$\int_I f := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j| \,, \tag{11}$$

dove $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}$ è una qualunque rappresentazione standard di f.

[6] Cfr. dimostrazione del Lemma 1.12.