1 L'integrale di Riemann su $\mathbb{R}$

D'ora in avanti *considereremo l'insieme vuoto un intervallo (limitato).*

Osservazione 1.1 (i) Si ricorda che *l'intersezione di due intervalli è un intervallo e che l'unione di due intervalli è un intervallo (se l'intersezione è non vuota o uno dei due intervalli è l'insieme vuoto) o l'unione disgiunta di due intervalli.*

(ii) *Il complementare di un intervallo è un intervallo o unione di due intervalli disgiunti.*

(iii) *Se I e J sono intervalli disgiunti non vuoti allora o $I \le J$ o $J \le I$.*

Dimostrazione* Sia $a = \inf I$, $b = \sup I$ e sia $y \in J$. Poiché I e J sono disgiunti $y \notin (a, b)$ e quindi si deve avere o $y \ge b$ o $y \le a$. Supponiamo $y \ge b$ (il caso $y \le a$ si tratta in modo analogo). In tal caso si ha $J \ge I$: infatti sia $y' \in J$, se fosse $y' < b$ allora (dalla definizione di estremo superiore) seguirebbe che esiste $x' \in I$ tale $y' < x'$, e quindi $y' < x' \le b \le y$, che implica che $x' \in J$ contraddicendo l'ipotesi che I e J sono disgiunti. Dunque $y' \ge b$. ∎

1.1 Insiemi elementari

Definizione 1.2 *Un insieme elementare $E \subseteq \mathbb{R}$ è una unione finita di intervalli limitati disgiunti*[1]*. La famiglia degli insiemi elementari si denota $\mathscr{E} := \mathscr{E}(\mathbb{R})$; più in generale, $\mathscr{E}(I)$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ denota la famiglia degli insiemi elementari contenuti in I.*

Lemma 1.3 *Sia $E = \bigcup_{1 \le k \le n} I_k$ con I_k intervalli. Allora esistono $m \le n$ intervalli I'_k a due a due disgiunti tali che $E = \bigcup_{1 \le k \le m} I'_k$; in particolare, se gli I_k sono limitati, $E \in \mathscr{E}$.*

Dimostrazione* Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ la tesi è vera con $m = n = 1$ e $I'_1 = I_1$. Assumiamo la tesi vera per $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamola per $n + 1$. Se $I_{n+1} \cap I_k = \varnothing$ per ogni $1 \le k \le n$ la tesi segue direttamente dall'ipotesi induttiva (con $m \le n + 1$). Se esiste $j \le n$ tale che $I_{n+1} \cap I_j \ne \varnothing$, allora $\tilde{I}_j := I_j \cup I_{n+1}$ è un intervallo e la tesi segue dall'ipotesi induttiva applicata agli n intervalli I_k con k tale che $j \ne k \le n$ e $\tilde{I}_j$ (in questo caso, $m \le n$). ∎

Notazione Se $E = \cup A_j$ con A_j disgiunti ($A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \ne j$) scriveremo $E = \dot{\cup} A_j$.

Proposizione 1.4 *Se $A, B \in \mathscr{E}(I)$, allora $A \cap B$, $A \cup B$, e $A \backslash B$ appartengono a $\mathscr{E}(I)$.*

Dimostrazione* Siano $A = \dot{\cup} I_j$ e $B = \dot{\cup} J_k$ con I_j e J_k intervalli in[2] I. Allora, $A \cup B = \bigcup_{j,k} I_j \cup J_k$ e quindi (Lemma 1.3) $A \cup B \in \mathscr{E}(I)$. Inoltre,

$$A \cap B = \dot{\bigcup_{j,k}} I_j \cap J_k \in \mathscr{E}(I) \,. \tag{1}$$

Infine,

$$A \backslash B = (\dot{\cup}_j I_j) \cap (\dot{\cup}_k J_k)^c = (\dot{\cup}_j I_j) \cap (\cap_k J_k^c) = \dot{\cup}_j (I_j \cap_k J_k^c) \,. \tag{2}$$

Per l'Osservazione 1.1–(ii), $I_j \cap_k J_k^c$ è unione di intervalli (contenuti in I_j) e dunque, da (2) e dal Lemma 1.3, segue che

$$A \backslash B = \dot{\bigcup_{j,i}} I_{ji} \in \mathscr{E}(I) \,, \qquad I_{ji} \subseteq I_j \backslash B \,. \quad ∎ \tag{3}$$

[1] Ossia, $E = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ con I_j intervalli limitati tali che $I_j \cap I_k = \varnothing$ se $j \ne k$.

[2] Gli indici variano su insiemi finiti.

Definizione *Due intervalli I e J si dicono adiacenti se $I \cap J = \varnothing$ e $I \cup J$ è un intervallo*[3].

Es 1 Siano $I \leq J$ due intervalli ordinati. Dimostrare che esiste un unico intervallo (eventualmente vuoto) I' "tra I e J", ossia un unico intervallo I' disgiunto da I e J, tale che $I \leq I' \leq J$ e $I \dot\cup I' \dot\cup J$ è un intervallo.

Es 2 *Sia $E \in \mathscr{E}$. Dimostrare che esistono e sono unici intervalli ordinati I_i $(1 \leq i \leq n)$ ma non adiacenti tali che $\dot\cup I_i = E$.*

1.2 Funzioni a scalini

Definizione 1.5 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ a scalini è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche*[4] *di intervalli in I limitati e disgiunti, ossia,*

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}\,,\ I_j \textit{ intervallo limitato}\,,\ I_j \subseteq I\,,\ I_j \cap I_k = \varnothing\,,\ \forall j \neq k\,; \tag{4}$$

l'insieme di tali funzioni si denota $S(I)$ e poniamo $S := S(\mathbb{R})$; l'identità (4) è una 'rappresentazione standard' di $f \in S(I)$.

Osservazione 1.6 (i) Ovviamente, la rappresentazione standard di una funzione a scalini non è unica ad esempio:

$$\chi_{[0,1]} = 2\chi_{[0,1/2)} - \chi_{[0,1]} + 2\chi_{[1/2,1]}\,.$$

(ii) Se $f \in S(I)$ è come in (4), $E := \dot\cup I_j \in \mathscr{E}(I)$ e $f(x) = 0$ se $x \notin E$. In particolare le funzioni a scalini sono nulle al di fuori dell'intervallo limitato $[\inf E, \sup E]$.

Nel resto di questo capitolo, I denota un intervallo fissato in $\mathbb{R}$ (ad esempio $I = \mathbb{R}$) o $I = [0,1)$).

Lemma 1.7 *Se $f, g \in S(I)$, esistono intervalli disgiunti e limitati $I_i \subseteq I$, $1 \leq i \leq n$, e numeri reali α_i e β_i tali che*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{I_i}\,, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{I_i}\,. \tag{5}$$

Il punto di questo lemma è che gli intervalli che appaiono nelle rispettive rappresentazioni standard delle funzioni f e g *possono essere presi uguali*.

Dimostrazione* Essendo $f, g \in S(I)$, esistono: p intervalli disgiunti $E_j \subseteq I$, p numeri reali γ_j, q intervalli disgiunti $J_k \subseteq I$ e q numeri reali δ_k, tali che

$$f = \sum_j \gamma_j \chi_{E_j}\,, \qquad g = \sum_k \delta_k \chi_{J_k}\,.$$

Siano A e B gli insiemi elementari dati da $A = \dot\cup_j E_j$ e $B = \dot\cup_k J_k$. Dalla Proposizione 1.4 (vedi, in particolare, (1) e (3)) segue che

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B) \dot\cup (A \backslash B) \dot\cup (B \backslash A) \\ &= \Big(\dot\bigcup_{j,k} E_j \cap J_k\Big) \,\dot\cup\, \Big(\dot\bigcup_{j,i} E_{ji}\Big) \,\dot\cup\, \Big(\dot\bigcup_{k,\ell} J_{k\ell}\Big) \end{aligned}$$

con E_{ji} intervalli (disgiunti) contenuti in $E_j \backslash B$ e $J_{k\ell}$ intervalli (disgiunti) contenuti in $J_k \backslash A$. La famiglia di intervalli $\mathscr{F} := \{E_j \cap J_k\} \cup \{E_{ji}\} \cup \{J_{k\ell}\}$ è una famiglia finita di intervalli a

[3] Ad esempio, $(0,1)$ e $[1,+\infty)$ sono adiacenti e $(0,1)$ e $(1,+\infty)$ non lo sono (ma sono contigui).

[4] Si ricorda che la funzione caratteristica (o indicatrice) di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è la funzione $x \to \chi_A(x)$ definita come $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$; in particolare $\chi_\varnothing$ è la funzione identicamente nulla.

due a due disgiunti contenuti in I e su ognuno di tali intervalli le funzioni f e g sono costanti e assumono i seguenti valori[5]:

$$\begin{cases} f|_{E_j\cap J_k} = \gamma_j \\ \\ g|_{E_j\cap J_k} = \delta_k \end{cases} , \qquad \begin{cases} f|_{E_{ji}} = \gamma_j \\ \\ g|_{E_{ji}} = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} f|_{J_{k\ell}} = 0 \\ \\ g|_{E_{k\ell}} = \delta_k \end{cases} . \tag{6}$$

Poiché f e g sono nulle fuori da $A \cup B$ l'asserto segue ponendo[6] $\{I_i\} = \mathscr{F}$ e definendo di conseguenza secondo la (6) i numeri α_i e β_i. $\blacksquare$

Da questo lemma segue immediatamente la seguente

Proposizione 1.8 *Se $f, g \in S(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora appartengono a $S(I)$ anche le funzioni $af + bg$, fg, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f^\pm$ e $|f|$.*

Dimostrazione Siano f, g come in (5), allora

$$af + bg = \sum_{j=1}^{n} (a\alpha_j + b\beta_j)\chi_{I_j} \ , \quad fg = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j\beta_j)\chi_{I_j} \ , \quad \max\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} \max\{\alpha_j, \beta_j\}\chi_{I_j} \ ,$$
$$\min\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} \min\{\alpha_j, \beta_j\}\chi_{I_j} \ , \ , \quad f^\pm = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^\pm \chi_{I_j} \ , \quad |f| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\chi_{I_j} \ . \qquad \blacksquare$$

Osservazione 1.9 Da questa proposizione segue, in particolare, che se $\alpha_j \in \mathbb{R}$ e I_j sono intervalli *non necessariamente disgiunti*, $(1 \le j \le n)$, allora $\sum_j \alpha_j \chi_{I_j}$ è una funzione a scalini.

Es 3 Sia $f(x) = \sqrt{2}\chi_{[0,5)} - \chi_{(-1/2,1/2)} + 7\chi_{(3,2\pi)}$. Si determini una rappresentazione standard di f.

Es 4 Siano $f = -2\chi_{[-3,-2)} + 5\chi_{(1,\sqrt{2}]}$, $g = \sum_{i=1}^{5} (-1)^i \chi_{(-4+i,-3+i)}$. Si determinino n, I_i, α_i e β_i tali che valga la (5).

Es 5 Dimostrare che $f \in S(E)$ se e solo se $\#f(E) < \infty$, ossia f assume un numero finito di valori (che includono sempre lo zero), e per ogni $\alpha \in f(E)\backslash\{0\}$, $f^{-1}(\alpha) \in \mathscr{E}(E)$.

Definizione *La rappresentazione (4) di una funzione a scalini f non identicamente nulla si dice* **minimale** *se gli α_i sono tutti non nulli; se gli intervalli disgiunti I_i sono ordinati ($I_i \le I_{i+1}$), e se $I_i \cup I_{i+1}$ per qualche i è un intervallo, allora $\alpha_i \ne \alpha_{i+1}$.*

Es 6 Si determini la rappresentazione minimale per la funzione f dell'Es 3 e della funzione $f + g$ dell'Es 4.

Es 7* Dimostrare che la rappresentazione minimale di una funzione a scalini non nulla è unica.

1.3 Misura di insiemi elementari

Cominciamo col definire la misura (o lunghezza) di un intervallo:

Definizione 1.10 *Sia I un intervallo. Chiamiamo lunghezza o misura (unidimensionale) I l'elemento di $\mathbb{R}^*$ dato da*

$$|I| := \begin{cases} 0 \,, & \text{se } I = \varnothing \,; \\ \\ +\infty \,, & \text{se } I \text{ non è limitato} \,; \\ \\ \sup I - \inf I \,, & \text{se } \varnothing \ne I \text{ è limitato} \,. \end{cases} \tag{7}$$

[5] Se $f : A \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$, la funzione $f|_B$ è la funzione f ristretta sull'insieme B, ossia, la funzione $f|_B : B \to \mathbb{R}$ tale che $f|_B(x) = f(x)$ per ogni $x \in B$.

[6] Ossia, $I_1, ..., I_n$ è una numerazione dell'insieme finito $\mathscr{F}$ di cardinalità n.

A volte si usano i simboli $\ell(I)$ o $\mathrm{mis}_1(I)$ al posto di $|I|$.

Osservazione 1.11 (i) La lunghezza di un punto (o meglio di un singleton $I = \{a\} = [a, a]$) è zero.

(ii) Si noti anche che la definizione di lunghezza non dipende dal fatto che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.

Lemma 1.12 *Sia I un intervallo limitato, $n \geq 2$ e $I_1, ..., I_n$ intervalli tali che $I = \dot\cup I_k$. Allora*

$$|I| = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \,. \tag{8}$$

Dimostrazione Poiché gli intervalli I_k sono disgiunti, per il punto (iii) dell'Osservazione 1.1 possiamo assumere che $I_1 \leq \cdots \leq I_n$. Siano $a_k = \inf I_k \leq b_k = \sup I_k$ per ogni $1 \leq k \leq n$, $a = \inf I = a_1$ e $b = \sup I = b_n$. Poniamo anche $a_{n+1} := b_n = b$. Poichè $I = \dot\cup I_k$ (e I è un intervallo), si deve avere $a_{k+1} = b_k$ per ogni $1 \leq k \leq n$ e quindi

$$|I| = b - a = a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \,. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.13 *Siano I_j e J_k intervalli limitati con $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$ tali che $E = \dot\cup I_j = \dot\cup J_k$. Allora $\sum |I_j| = \sum |J_k|$.*

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che per ogni j e k si ha $I_j = \dot\cup_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot\cup_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 1.12 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$. Quindi,

$$\sum_j |I_j| = \sum_j \sum_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j |I_j \cap J_k| = \sum_k |J_k| \,. \qquad \blacksquare$$

Questo lemma permette di dare la definizione di misura di un insieme elementare:

Definizione 1.14 *Sia $E \in \mathscr{E}$. Allora $|E| := \mathrm{mis}_1(E) := \sum |I_k|$ dove $E = \dot\cup I_k$ $(1 \leq k \leq n)$.*

Si noti che il numero $|E|$ per il Lemma 1.13 dipende solo dall'insieme elementare E e *non* dal particolare modo in cui viene rappresentato come unione disgiunta di intervalli.

1.4 Integrale di funzioni a scalini

Lemma 1.15 *Sia $f \in S(I)$ e siano*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{J_k} = f \tag{9}$$

due sue rappresentazioni standard. Allora,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j| = \sum_{k=1}^{m} \beta_k |J_k| \,. \tag{10}$$

Dimostrazione* Possiamo assumere che $\alpha_j \neq 0 \neq \beta_k$ per ogni j e k (dato che se sono zero non contribuiscono alle somme in (10)). In tal caso

$$E := \dot\cup_j I_j = \dot\cup_k J_k = \{x \in \mathbb{R} \big| \, f(x) \neq 0\} \,.$$

Ora[7], per ogni j e k si ha $I_j = \dot\cup_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot\cup_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 1.12 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$; inoltre, se $I_j \cap J_k \neq \varnothing$ si deve avere $\alpha_j = \beta_k$ (essendo il valore di f su $I_j \cap J_k$), mentre se $I_j \cap J_k = \varnothing$, allora $|I_j \cap J_k| = 0$. Quindi,

$$\sum_j \alpha_j |I_j| = \sum_j \sum_k \alpha_j |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j \alpha_j |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j \beta_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \beta_k |J_k| \,. \qquad \blacksquare$$

Grazie a tale lemma la seguente definizione è ben posta:

Definizione 1.16 *Se $f \in S(I)$ chiamiamo integrale di f su I il seguente numero reale*

$$\int_I f := \sum_{j=1}^n \alpha_j |I_j| \,, \tag{11}$$

dove $\displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}$ è una qualunque rappresentazione standard di f.

Dalla Proposizione 1.8 (e dalla sua dimostrazione) segue immediatamente la seguente

Proposizione 1.17 *L'integrale è un 'funzionale lineare e positivo su $S(I)$', ossia:*

$$\int_I (af + bg) = a \int_I f + b \int_I g \,, \qquad \forall\ f, g \in S(I) \tag{12}$$

$$\int_I f \geq 0 \,, \qquad \forall\ f \in S(I)\,,\ f \geq 0 \,. \tag{13}$$

Osservazione 1.18 (i) Da (12) e (13) segue subito che, se $f, g \in S(I)$, allora

$$f \leq g \implies \int_I f \leq \int_I g \,, \qquad \big(f, g \in S(I)\big) \,. \tag{14}$$

(ii) Da (12) segue che se $\alpha_j \in \mathbb{R}$ e $I_j \subseteq E$ sono intervalli *non necessariamente disgiunti*, $(1 \leq j \leq n)$, allora

$$\int_E \sum_j \alpha_j \chi_{I_j} = \sum_j \alpha_j |I_j| \,.$$

1.5 Funzioni Riemann integrabili

In questa sezione I è *un intervallo limitato*.

Definizione 1.19 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Denotiamo*

$$S_f^-(I) := \{g \in S(I) \big| \, g \leq f\} \,, \qquad S_f^+(I) := \{h \in S(I) \big| \, h \geq f\} \,. \tag{15}$$

Definiamo integrale inferiore di Riemann e integrale superiore di Riemann di f su I i numeri

$$\mathscr{I}_I^-(f) := \sup_{g \in S_f^-(I)} \int_I g \,, \qquad \mathscr{I}_I^+(f) := \inf_{h \in S_f^+(I)} \int_I h \,. \tag{16}$$

La funzione f si dice Riemann integrabile se $\mathscr{I}_I^-(f) = \mathscr{I}^+ I(f)$ ed, in tal caso, si definisce l'integrale di Riemann di f il numero reale

$$\int_I f := \mathscr{I}_I^-(f) = \mathscr{I}_I^+(f) \,. \tag{17}$$

La classe di funzioni Riemann integrabile su I si denota con $\mathscr{R}(I)$.

[7] Cfr. dimostrazione del Lemma 1.13.

Osservazione 1.20 (i) Si noti che per una funzione limitata f, gli insiemi $S_f^+(I)$ e $S_f^-(I)$ sono sottoinsiemi non vuoti di $S(I)$. Inoltre, se $g \in S_f^-(I)$ e $h \in S_f^+(I)$, allora $g \le f \le h$ e dunque, da (14), segue che $\int_I g \le \int_I h$ e

$$\Big\{ \int_I g \big| \, g \in S_f^-(I) \Big\} \le \Big\{ \int_I h \big| \, h \in S_f^+(I) \Big\} . \tag{18}$$

Nel caso $f \in \mathscr{R}(I)$ tali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono contigui e l'integrale di Riemann ne è l'elemento separatore. In altri termini, si ha

$$f \in \mathscr{R}(I) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ g, h \in S(I) : \begin{cases} g \le f \le h \, , \\ \displaystyle\int_I (h - g) < \varepsilon \, . \end{cases} \tag{19}$$

(ii) $S(I) \subseteq \mathscr{R}(I)$: se $f \in S(I)$ possiamo prendere in (19) $g = f = h$.

(iii) Se $m \le f \le M$ possiamo assumere che le funzioni a scalini in (19) siano tali che $m \le g$ e $h \le M$. Infatti, le funzioni $\max\{g, m\}$ e $\min\{h, M\}$ sono a scalini (Proposizione 1.8) e $g \le \max\{g, m\} \le f \le \min\{h, M\} \le h$ e

$$\int_I (\min\{h, M\} - \max\{g, m\}) \le \int_I (h - g) \, .$$

Da (19) segue subito la seguente caratterizzazione di integrabilità:

Proposizione 1.21 (Criterio di integrabilità per successioni)
$f \in \mathscr{R}(I)$ se e solo per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono, $g_n \in S_f^-(I)$ e $h_n \in S_f^+(I)$ tali che $\int_I (h_n - g_n) \to 0$ ed in tal caso $\int_I f = \lim \int_I h_n = \lim \int_I g_n$.

Dimostrazione Sia $f \in \mathscr{R}(I)$. Se $\varepsilon = 1/n$, da (19) segue che esistono $g_n \in S_f^-(I)$ e $h_n \in S_f^+(I)$ tali che $0 \le \int_I (h_n - g_n) < 1/n$, e dalla definizione di sup e inf e da (17) segue che $\int_I f = \lim \int_I h_n = \lim \int_I g_n$.
Viceversa, dato $\varepsilon > 0$ sia N tale che $\int_I (h_n - g_n) < \varepsilon$ per ogni $n \ge N$ con $g_n \le f \le h_n$ e $g_n, h_n \in S(I)$. Allora vale vale la (19) con $g = g_N$ e $h = h_N$. ∎

Osservazione 1.22 *Le successioni di funzioni $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$ possono essere prese rispettivamente crescenti (ossia $g_n(x) \le g_{n+1}(x)$ per ogni $x \in I$) e decrescenti (ossia $h_n(x) \ge h_{n+1}(x)$ per ogni $x \in I$).*
Dimostrazione Se $\tilde{g}_n \in S_f^-$ e $\tilde{h}_n \in S_n^+$ sono tali che $\lim \int_I (\tilde{h}_n - \tilde{g}_n) = 0$, ricordando che il massimo/minimo tra funzioni a scalini è a scalini, possiamo prendere $g_n = \max\{\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n\}$ e $h_n = \min\{\tilde{h}_1, ..., \tilde{h}_n\}$; infatti $\{g_n(x)\}$ è crescente e $\{h_n(x)\}$ decrescente e quindi $h_n - g_n \le \tilde{h}_n - \tilde{g}_n$ e integrando tale relazione su I si ottiene che $0 \le \int_I (h_n - g_n) \le \int_I (\tilde{h}_n - \tilde{g}_n) \to 0$. ∎

Nel prossimo teorema raccogliamo le proprietà fondamentali dell'integrale secondo Riemann.

Teorema 1.23 (Proprietà dell'integrale di Riemann)
(a) *Se $f_1, f_2, g \in \mathscr{R}(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora appartengono a $\mathscr{R}(I)$ anche le funzioni $af_1 + bf_2$, $f_1 f_2$, $\max\{f_1, f_2\}$, $\min\{f_1, f_2\}$, $f^\pm$ e $|f|$.*
(b) *L'integrale di Riemann è un funzionale lineare e positivo su $\mathscr{R}(I)$:*

$$\int_I (af_1 + bf_2) = a \int_I f_1 + b \int_I f_2 \, , \qquad \forall \ f_1, f_2 \in \mathscr{R}(I) \, , \tag{20}$$

$$\int_I f \ge 0 \, , \qquad \forall \ f \in \mathscr{R}(I) \, , f \ge 0 \, . \tag{21}$$

(c) *L'integrale di Riemann è additivo: se* $f \in \mathscr{R}(I)$*, per ogni intervallo* $J \subseteq I$*,* $f \in \mathscr{R}(J)$ *e*

$$\int_J f = \int_I f\chi_J \tag{22}$$

e se $I = I_1 \dot\cup I_2$ *con* I_i *intervalli allora*

$$\int_{I_1} f + \int_{I_2} f = \int_I f\,. \tag{23}$$

Dimostrazione* Useremo sistematicamente la Proposizione 1.8. Dividiamo la dimostrazione di (a) in vari passi.
(i) Siano $g_i, h_i \in S(I)$ come nella relazione analoga a (19) con f_i al posto di f e $\varepsilon/2$ al posto di ε. Allora vale (19) con $g := g_1 + g_2, h := h_1 + h_2 \in S$ e $f := f_1 + f_2$ e quindi $f \in \mathscr{R}(I)$.
(ii) Sia $a > 0$. Se $f \in \mathscr{R}(I)$ e vale la (19) con ε/a al posto di ε, allora vale la (19) con ag, af e ah al posto di g, f e h. Dunque $af \in \mathscr{R}(I)$ per ogni $f \in \mathscr{R}(I)$ e $a > 0$.
(iii) Se vale la (19) allora si ha $-h \le -f \le -g$ e $\int_I(-g-(-h)) = \int_I(h-g) < \varepsilon$ ossia $-f \in \mathscr{R}(I)$. Da questa osservazione e da (i) e (ii) segue che $af_1 + bf_2 \in \mathscr{R}(I)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathscr{R}(I)$.
(iv) Dimostriamo che $f^\pm, |f| \in \mathscr{R}(I)$. Si ricordi che la funzione $x \to x^+$ è crescente e che $x \to x^-$ è decrescente. Dunque se vale (19), allora $g^+ \le f^+ \le h^+$ e $h^+ - g^+ \le (h^+ - g^+) + (g^- - h^-) = h - g$ e quindi $\int_I(h^+ - g^+) < \varepsilon$, e quindi $f^+ \in \mathscr{R}(I)$. Poiché $f^- = (-f)^+$ da (iii) segue che $f^- \in \mathscr{R}(I)$ e che $|f| = f^+ + f^- \in \mathscr{R}(I)$.
(v) Dal punto precedente, segue che $\max\{f_1, f_2\} = (f_1 - f_2)^+ + f_2 \in \mathscr{R}(I)$. Quindi anche $\min\{f_1, f_2\} = -\max\{-f_1, -f_2\} \in \mathscr{R}(I)$.
(vi) Dimostriamo ora che se $f \in \mathscr{R}(I)$ e $f \ge 0$, allora $f^2 \in \mathscr{R}(I)$. Sia $M = \sup f$ e assumiamo (19) con $\varepsilon/(2M)$ al posto di ε. Per l'Osservazione 1.20–(iv), possiamo assumere che $g \ge 0$ e $h \le M$. Allora, $g^2 \le f^2 \le h^2$ e $\int_I(h^2 - g^2) = \int_I(h-g)(h+g) \le 2M\int_I(h-g) < \varepsilon$ e dunque $f^2 \in \mathscr{R}(I)$.
Da questo segue anche che se $f, g \in \mathscr{R}(I)$ e $f, g \ge 0$ allora $fg = \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big) \in \mathscr{R}(I)$.
Quindi, per qualunque $f \in \mathscr{R}(I)$, $f^2 = (f^+ - f^-)^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2 - 2f^+f^- \in \mathscr{R}(I)$.
Infine, se $f, g \in \mathscr{R}$, $fg = f^+f^- + g^+g^- - f^+g^- - f^-g^+ \in \mathscr{R}(I)$. Questo conclude la dimostrazione di (a).

La (20) segue immediatamente da (a), da (12) e dal fatto che $\int_I f_i = \lim \int_I g_n^{(i)}$ con $g_n^{(i)}$ a scalini.
La (21) segue da (13) e dal fatto che $\int_I f = \lim \int_I g_n$ con $0 \le g_n \le f$ a scalini (si ricordi l'Osservazione 1.20–(iv)). Questo conclude la dimostrazione di (b).

Dimostriamo (c). Siano g_n e h_n come nella Proposizione 1.21. Allora[8], $g_n\chi_J, h_n\chi_J \in S(J)$, $g_n\chi_J \le f \le h_n\chi_J$ su J, e

$$\int_J (h_n\chi_J - g_n\chi_J) = \int_I (h_n\chi_J - g_n\chi_J) \le \int_I (h_n - g_n) \to 0\,.$$

Quindi (Proposizione 1.21) $f \in \mathscr{R}(J)$ e

$$\int_J f = \lim \int_J g_n\chi_J\,.$$

D'altra parte, si ha anche $g_n\chi_J \le f\chi_J \le h_n\chi_J$ su I e quindi

$$\int_I f\chi_J = \lim \int_I g_n\chi_J = \lim \int_J g_n\chi_J = \int_J f\,. \quad \blacksquare$$

Es 8 Dimostrare che le funzioni x e x^2 sono integrabili su $(0, 1)$ e calcolarne l'integrale usando la Proposizione 1.21.

[8]Si ricordi che $\chi_A\chi_B = \chi_{A\cap B}$ e si usi la Proposizione 1.21.

Es 9 (Una funzione a 'infiniti scalini'). Sia $I_n := [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $\{\alpha_n\}$ una successione limitata e $f := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{I_n}$. Dimostrare che $f \in \mathscr{R}([0,1])$ e calcolare $\int_{[0,1]} f$.

Es 10 Sia $I = [0,1]$, $Q := \mathbb{Q} \cap I$ e $f = \chi_Q$. Dimostrare che $\mathscr{I}_I^-(f) = 0$ e $\mathscr{I}_I^+(f) = 1$ e quindi che $f \notin \mathscr{R}(I)$.

1.6 Partizioni di intervalli e somme di Riemann

Definizione 1.24 *Una partizione di un intervallo I è una famiglia $P = \{I_j \big| 1 \le j \le n\}$ finita di intervalli disgiunti I_j tali che $I = \dot\cup I_j$. L'insieme di tutte le partizioni di I verrà denotato $\mathscr{P}(I)$. Diremo che la partizione $P = \{I_j\}$ è ordinata se $I_1 \le \cdots \le I_n$; in tal caso (essendo $I = \dot\cup I_j$), se $n > 1$, $\sup I_j = \inf I_{j+1}$, per ogni $1 \le j \le n-1$.*

Lemma 1.25 *Se $f \in S(I)$ esiste una partizione $P = \{I_j \big| 1 \le j \le n\} \in \mathscr{P}(I)$ e numeri reali α_j tali che $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}$.*

Dimostrazione* Sia $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{2k-1} \chi_{I_{2k-1}}$, $I_{2k-1} \subseteq I$, una rappresentazione standard di f (la scelta degli indici solo dispari è fatta per comodità di notazioni). Assumiamo che gli intervalli I_{2k-1} siano ordinati (Osservazione 1.1–(iii)) e che siano non vuoti. Per ogni $0 \le k \le m$ sia I_{2k} l'unico intervallo (eventualmente vuoto) tra[9] I_{2k-1} e I_{2k+1}. Allora, $\{I_k\}$ è una partizione di I e l'asserto segue ponendo $\alpha_{2k} = 0$ e $n = 2m$. ∎

Proposizione 1.26 (Critertio di integrabilità per partizioni)
$f \in \mathscr{R}(I)$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $P = \{I_j \big| 1 \le j \le n\} \in \mathscr{P}(I)$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)|I_j| < \varepsilon \,. \tag{24}$$

Dimostrazione * Dato $\varepsilon > 0$ se vale (24), allora vale (19) con

$$g = \sum_{j=1}^{n} (\inf_{I_j} f) \chi_{I_j} \,, \qquad h = \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f) \chi_{I_j} \,.$$

Viceversa, assumiamo che, dato $\varepsilon > 0$, valga (19) e che le funzioni a scalini g e h siano definite sugli stessi intervalli (cosa che possiamo fare per il Lemma 1.7). Per il Lemma 1.25 (e la sua dimostrazione) esiste allora una partizione $P = \{I_j\}$ di I tale che

$$g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j} \,, \qquad h = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{I_j} \,.$$

Da $g \le f \le h$ segue che $\alpha_j \le \inf_{I_j} f \le \sup_{I_j} f \le \beta_j$ e quindi

$$\sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)|I_j| \le \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j)|I_j| < \varepsilon \,. \quad ∎$$

Dalla Proposizione 1.26 e dalla definizione di integrale di Riemann segue immediatamente la seguente

Proposizione 1.27 *Se $f \in \mathscr{R}(I)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P = \{I_j\}$ di I tale che per ogni scelta di punti $x_j \in I_j$ si ha*

$$\Big| \int_I f - \sum_{j=1}^{n} f(x_j)|I_j| \Big| < \varepsilon \,. \tag{25}$$

La somma in (25) viene a volte chiamata *somma di Riemann* (rispetto alla partizione P e alla scelta di punti $\{x_j\}$).

[9] Vedi Es 4.