Appello A – AM120-ANALISI MATEMATICA 2 – (AA 2023/24) 10/6/2024

Nome, Cognome e numero di matricola:

(Ridotto: Es 1–(ii),2–(ii),3)

Es 1 [Pt 40] Discutere la convergenza delle seguenti serie, al variare di $x \in \mathbb{R}$:

(i) [20 pt] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + 2^n}{n \operatorname{senh} n}$; (ii) [20 pt] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^x} - 1}{n^{nx} + 1}$.

Es 2 [Pt 30] Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dei seguenti integrali impropri:

(i) [15 pt] $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{\operatorname{senh} x - x}\, dx$; (ii) [15 pt] $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}}\, dx$.

Es 3 [Pt 20] Sia $f(x) = \dfrac{|x-1|}{(x^2+5)^{1/2}}$ e $I = [0,2]$. Dato $\varepsilon > 0$, determinare $\delta > 0$ per cui $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, per ogni $x, y \in I$ tali che $|x-y| < \delta$. [**Suggerimento:** $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |(f(x)-f(y))g(x) + f(y)(g(x)-g(y))|$.]

Es 4 [Pt 10] Sia $A = \{x = \operatorname{sen}(1/n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Dire se E è un insieme compatto , nel caso non lo fosse, determinare il più piccolo insieme compatto $\overline{E}$ tale che $E \subseteq \overline{E}$.

Soluzioni

Es 1 (i): Poiché $\left(\dfrac{2^n}{n \operatorname{senh} n}\right)^{1/n} \to \dfrac{2}{e} < 1$, la serie $\sum \dfrac{2^n}{n \operatorname{senh} n}$ converge (radice) e quindi basta studiare la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \operatorname{senh} n}$. Poiché $\left(\dfrac{|x|^n}{n \operatorname{senh} n}\right)^{1/n} \to \dfrac{|x|}{e} < 1$, la serie $\sum \dfrac{x^n}{n \operatorname{senh} n}$ converge assolutamente per $|x| < e$ e non converge per $|x| > e$ (radice); per $x = e$ la serie si comporta come $\sum \frac{1}{n}$ e quindi diverge; per $x = -e$ la serie è data da $-\sum (-1)^n \dfrac{1}{n(1-e^{-2n})}$ e poiché $\frac{1}{n(1-e^{-2n})}$ è decrescente e tende a 0, la serie converge per Leibniz. In conclusione, la serie converge assolutamente per $|x| < e$, condizionatamente per $x = -e$ e non converge altrimenti.

(ii) La serie è a termini positivi. Per $x = 0$ diverge (i termini sono identicamente uguali a 1/2). Per $x > 0$ $\frac{2^{n^x}-1}{n^{nx}+1} \sim \frac{2^{n^x}}{n^{nx}}$ e $\left(\frac{2^{n^x}}{n^{nx}}\right)^{1/n} = \frac{2^{n^{x-1}}}{n^x} \to 0$ se $x \le 1$ e tende a $+\infty$ se $x > 1$; quindi per $x \ge 0$ converge se e solo se $x \in (0,1)$. Se $x < 0$ la serie si comporta come (confronto asintotico) $\sum 2^{n^x} - 1 = \sum e^{\log 2/n^{|x|}} - 1 \approx \sum \dfrac{1}{n^{|x|}} < +\infty$ se e solo se $x < -1$. In conclusione la serie converge se $x \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$ e diverge altrimenti.

Es 2 (i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^\alpha}{\operatorname{senh} x - x}\, dx \approx \int_1^{\infty} x^\alpha e^{-x} < +\infty$ per ogni α. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\operatorname{senh} x - x}\, dx \approx \int_0^1 x^{\alpha-3}\, dx < +\infty$ se e solo se $\alpha > 2$. In conclusione l'integrale converge se e solo se $\alpha > 2$.

(ii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}}\, dx \approx \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx < +\infty$ (per ogni α). $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}}\, dx = \int_2^{\infty} \frac{\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}}\, dx \approx \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{\log x}} < +\infty$ se e solo se $\alpha > 1$; in alternativa, $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}}\, dx \approx \int_2^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log x}}\, dx$ e facendo il cambio di variable $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$ e ponendo $y_0 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} 2$ si ha $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log x}}\, dx = \int_0^{y_0} \frac{y^\alpha}{\sqrt{\log(1 + \operatorname{cotan} y)}} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 y}\, dy \approx \int_0^{y_0} \frac{y^{\alpha-2}}{\sqrt{|\log y|}}\, dy < +\infty$ se e solo se $\alpha > 1$.

Es 3 $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |(f(x)-f(y))g(x) + f(y)(g(x)-g(y))| \le \sup_I |g||f(x)-f(y)| + \sup_I |f||g(x)-g(y)|$. Dunque se $f(x) = |x-1|$ e $g(y) = 1/(x^2+5)^{1/2}$ si ha $\sup_I |f| \le 1$ e $\sup_I |g| \le 1/\sqrt{5}$; inoltre $|f(x)-f(y)| \le |x-y|$ e $|g(x)-g(y)| \le \sup_I |g'||x-y| < |x-y|$. In definitiva si può prendere $\delta = \varepsilon/2$.

Es 4 A è limitato, ma non è chiuso poiché $\operatorname{sen}(1/n) \to 0$ e $0 \notin A$. La chiusura di A è data da $A \cup \{0\}$che è chiaramente il più piccolo compatto che contiene A.