Nome, Cognome e numero di matricola:

Es 1 [45 pt] Discutere la convergenza delle seguenti serie: (i) [15 pt] $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\big(\log(\log n)\big)^4}$.

(ii) [30 pt] Studiare , al variare di $x \in \mathbb{R}$ la serie: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(x/2)^{2n} + \log n}$.

Es 2 [35 pt] (i) [15 pt] Discutere la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^4}{\cosh(\sqrt{x} + \log x)}\, dx$.

(ii) [20 pt] Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan^{\alpha}(x - x^2)}{|\log(1-x)|}\, dx$.

Es 3 [20 pt] (i) Sia $g(x) = \{x\}\{1-x\}$. Si dimostri che g è continua su $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 1.
(ii) Si calcoli il limite inferiore di $a_n = g(3,14 \cdot n)$.

Risposte

Es 1 (i) Diverge. (criterio di condensazione di Cauchy usato due volte). (ii) Converge assolutamente su $\{|x| < 1\} \cup \{|x| > 4\}$ e condizionatamente per $x = -1$, non converge altrimenti (per convergenza assoluta si devono distinguere i casi $|x| < 1$, $1 < |x| < 2$ e $|x| > 2$).

Es 2 (i) Converge ($2\cosh(\sqrt{x} + \log x) = e^{\sqrt{x}}x + \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}$). (ii) Converge se e solo se $\alpha > 0$.

Es 3 (i) $\{x\}$ e $\{1-x\}$ sono entrambe periodiche di periodo 1; sono continue su $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ e hanno salti in $x \in \mathbb{Z}$. Poiché $g(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ segue che g è continua su $\mathbb{R}$. (ii) il liminf è zero essendo $a_n \geq 0$ e $a_{100k} = 0$.