Appello C – AM120-ANALISI MATEMATICA 2 – (AA 2023/24) 2/9/2024

Nome, Cognome e numero di matricola:

Es 1 [15 pt] Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{n^4}{n^{\log n}}+(-1)^n\tan\frac{1}{\sqrt{\log n}}\Big)$.

Es 2 [35 pt] Discutere, al variare di $x\in\mathbb{R}$ la convergenza della serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{xn}+1}{2^{n^x}-1}$.

Es 3 [35 pt] Discutere, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{senh}x}{(1-x)^2}\right)^{\alpha}\cdot\frac{1}{e^x-1}\,dx\,.$

Es 4 [15 pt] Discutere al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ l'uniforme continuità di $f(x)=\operatorname{sen}x^{\alpha}$ su $(0,+\infty)$.

Risposte

Es 1 Converge. Infatti, per $n\geq e^6$, $\frac{n^4}{n^{\log n}}\leq\frac{1}{n^2}$ e quindi la serie $\sum\frac{n^4}{n^{\log n}}$ converge per confronto; la seconda serie $\sum(-1)^n\tan\frac{1}{\sqrt{\log n}}$ converge per Leibniz essendo $\tan\frac{1}{\sqrt{\log n}}$ decrescente e tendente a 0 (attenzione, non essendo una serie a termini positivi, non si può usare il confronto asintotico!).

Es 2 La serie converge per $x>1$ e diverge altrimenti: per $x\leq 0$ i termini della serie non sono infinitesimi; per $x>0$ la serie sdi comporta come $\displaystyle\sum\frac{n^{xn}}{2^{n^x}}$ che converge per $x>1$ e diverge per $0<x\leq 1$ (radice).

Es 3 L'integrale converge se e solo se $0<\alpha<1/2$: vicino a 0, l'integrando si comporta come $x^{\alpha-1}$ che converge se e solo $\alpha>0$; vicino a 1, l'integrando si comporta come $1/(1-x)^{2\alpha}$ e converge se e solo se $\alpha<1/2$; vicino a $+\infty$, l'integrando si comporta come $e^{(\alpha-1)x}/x^{2\alpha}$, che converge se e solo se $\alpha\leq 1$.

Es 4 La funzione è uniformemente continua su $(0,+\infty)$ se e solo se $0\leq\alpha\leq 1$. Infatti, in 0 f ha limite (da destra) se e solo se $\alpha\geq 0$ e quindi è uniformemente continua vicino a 0 se e solo se $\alpha\geq 0$. $f'=\alpha x^{\alpha-1}\cos x^{\alpha}$ che è limitata vicino a $+\infty$ se $\alpha\leq 1$ e quindi f è uniformemente continua per $\alpha\leq 1$ vicino a $+\infty$, mentre se $\alpha>1$ prendendo $x_n=2\pi n$ e $y_n=x_n+\delta_n$ con $\delta_n=1/n^{(\alpha-1)/2}$ si vede che $|f(y_n)-f(x_x)|\sim cn^{(\alpha-1)/2}$ e quindi non è uniformemente continua vicino a $+\infty$.