Funzioni continue con asintoto sono uniformemente continue

Teorema *Sia f una funzione continua su $[c, +\infty)$ con asintoto*[1] *in $+\infty$. Allora, f è uniformemente continua su $[c, +\infty)$.*

Dimostrazione Dalla definizione di asintoto segue che esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali

$$g(x) := f(x) - ax \to b \qquad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Quindi (essendo g continua), g è uniformemente continua su $[c, +\infty)$. Ma allora lo è anche f (essendo la somma di due funzioni uniformemente continue). ∎

Naturalmente, un teorema analogo vale su insiemi $(-\infty, c]$.

[1] Si ricorda che una funzione $f : [c, +\infty) \to \mathbb{R}$ ha un asintoto in $+\infty$ se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ e se $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, il che equivale a dire che $\exists\ a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$.