Caratterizzazione dell'estremo superiore tramite successioni

Proposizione *Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}^*$.*
$M = \sup E$ se e solo se M è un maggiorante di E ed esiste una successione $\{x_n\}$, $x_n \in E$, tale che $\lim x_n = M$.
Dimostrazione Assumiamo $M = \sup E$ e sia $a_n := n$ se $M = +\infty$, $a_n := M - \frac{1}{n}$ se $M < +\infty$. Per la caratterizzazione dell'estremo superiore[1], per ogni n, esiste $x_n \in E$ tale che $a_n < x_n \le M$ e, quindi, per il teorema del confronto $\lim x_n = M$.
Il viceversa segue immediatamente dalla caratterizzazione dell'estremo superiore e dalle definizione di limite. ∎

Osservazione La successione convergente all'estremo superiore può essere presa monotòna: basta scegliere $y_n = \max\{x_1, ..., x_n\}$.

Es 1 Dimostrare che, nella Proposizione, se si assume che $M \in \mathscr{D}^* E$, allora la successione $\{x_n\}$ può essere presa *strettamente* crescente.
Suggerimento: Definire x_n per ricorrenza, scegliendo $x_1 > a_1$ e, per $n \ge 2$, $\max\{a_n, x_{n-1}\} < x_n < M$.

Es 2 Dimostrare che se $M = \sup E \notin \mathscr{D}^* E$, allora $M \in \mathscr{I} E$ (è un punto isolato di E).

Es 3 Dimostrare le analoghe affermazioni per l'estremo inferiore.

Es 4 Dimostrare che $\mathscr{D}^* E = \{y \in \mathbb{R}^* \big| \exists\ x_n \in E \backslash \{y\}\ ,\ x_n \to y\}$ (e analoga identità senza asterischi).
Suggerimento: Si definiscano i seguenti intorni di $y \in \mathbb{R}^*$: $V_n(y) = (n, +\infty)$ se $y = +\infty$, $V_n(y) = (-\infty, -n)$ se $y = -\infty$, $V_n(y) = (y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})$ se $y \in \mathbb{R}$.

[1] Vedi Proposizione 1.93 e Osservazione 2.4–(ii).