π

Prima di dare la definizione analitica di π, facciamo un'osservazione di carattere generale sulle serie.

Osservazione (Sull'uso delle parentesi nelle serie) La serie di Grandi[1]

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,,$$

nel senso classico di $\lim_{n\to\infty} s_n$ con $s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$, non esiste. Ora, se l'uso delle parentesi in serie infinite fosse lecito, si avrebbe

$$\begin{aligned}&1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0\,,\\&1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-(1-\cdot)+\cdots=1\,.\end{aligned}$$

Dunque, l'*uso delle parentesi nelle serie – al contrario di quanto avviene in somme finite – non è, in generale, lecito.*

D'altra parte, dal "teorema ponte" segue che se $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k \to \rho \in \mathbb{R}^*$ sono le somme parziali di una serie regolare, allora $\lim s_{n_k}=\rho$ per una qualunque successione $\{n_k\}$ a valori in $\mathbb{N}$ e tale che[2] $n_k \to +\infty$.

Lemma $\cos 2 < -1/3$ *e* $\cos x > 0$ *per ogni* $x \in [0,1]$.

Dimostrazione Dalla definizione di coseno segue che, se $x^2<56$, allora

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\left(\left(\frac{x^6}{6!}-\frac{x^8}{8!}\right)+\left(\frac{x^{10}}{10!}-\frac{x^{12}}{12!}\right)+\cdots\right)\\&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\left(\frac{x^6}{6!}\Big(1-\frac{x^2}{8\cdot 7}\Big)+\frac{x^{10}}{10!}\Big(1-\frac{x^2}{12\cdot 11}\Big)+\cdots\right)\\&< 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\,.\end{aligned}$$

essendo la serie tra parentesi grandi fatta di termini strettamente positivi[3]. In particolare, prendendo $x=2$, si ha che

$$\cos 2 < 1-\frac{2^2}{2}+\frac{2^4}{24}=-1/3\,.$$

Analogamente, se $x^2<30$, si ha che

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\&= 1-\frac{x^2}{2}+\left(\left(\frac{x^4}{4!}-\frac{x^8}{6!}\right)+\left(\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}\right)+\cdots\right)\\&= 1-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x^4}{4!}\Big(1-\frac{x^2}{6\cdot 5}\Big)+\frac{x^8}{8!}\Big(1-\frac{x^2}{10\cdot 9}\Big)+\cdots\right)\\&> 1-\frac{x^2}{2}\,.\end{aligned}$$

[1] https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_di_Grandi

[2] Si noti che la scelta dell successione $\{n_k\}$ equivale a "mettere parentesi" in somme parziali.

[3] I termini della serie sono $\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}\Big(1-\frac{x^2}{4k\cdot(4k-1)}\Big)$ con $k\geq 2$.

Quindi, se $0 \leq x \leq 1$, $\cos x \geq 1/2$. $\blacksquare$

Da questo lemma, dal teorema di esistenza del primo zero di una funzione continua e dal fatto che $x \mapsto \cos x$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$ segue immediatamente il seguente

Corollario *Esiste* $\beta \in (1,2)$ *tale che* $\cos \beta = 0$ *e* $\cos x > 0$ *per ogni* $x \in [0, \beta)$.

Definizione $\boxed{\pi := 2\beta}$

Esercizi

Es 1 Siano $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $0 < x^2 < (2n+4)(2n+3)$. Dimostrare che:

(i) $\cos x < \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\quad n$ pari

(ii) $\cos x > \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\quad n$ dispari

Es 2 Siano $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $0 < x^2 < (2n+5)(2n+4)$. Dimostrare che:

(i) $\sin x < \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\quad n$ pari

(ii) $\sin x > \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\quad n$ dispari

Es 3 Dimostrare che $\cos x > 0$ per ogni $x \in [0, 3/2]$.
[Suggerimento: Usare il punto (ii) dell'Es 1 con $n = 3$]

Es 4 Si dimostri che $|\sin x| < |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Es 5 (!) Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ e $0 < x < n+1$, si ha

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^n}{n!} \; \frac{n+1}{n+1-x} \, .$$