# Tre esercizi importanti

**Es 1** Dimostrare (per induzione) che

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e \le n! \le \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e\; n\,, \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}\,.$$

**Es 2** Dimostrare (per induzione) che

$$\frac{1}{n} + \log n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \log n\,, \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}\,.$$

**Es 3** (i) Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon}{n^{1+\varepsilon}}\,.$$

(ii) Dedurre dal punto (i) che,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty\,, \qquad \forall\; \varepsilon > 0\,.$$

**Osservazione** Dagli esercizi 2 e 3 segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1\,.$$