Funzioni esponenziali

Ricordiamo che per la Proposizione 1.111 si ha per ogni $a, b > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad a^x b^x = (ab)^x. \quad (1)$$

Sia ora $a > 1$ e consideriamo la funzione

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto f(x) := a^x \in (0, +\infty), \quad (a > 1).$$

Essendo $a > 1$, f è *strettamente crescente*¹ e dunque esistono i *limiti laterali* $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$ per ogni $x_0 \in \mathscr{D}^* \mathbb{Q} = \mathbb{R}^*$; inoltre per $a > 1$ e $m \in \mathbb{Z}$ si ha²

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{Q}}} \frac{a^x}{x^m} = +\infty, \quad (m \in \mathbb{Z}, a > 1). \quad (2)$$

Infatti, i limiti laterali di f coincidono:

$$\textbf{Lemma} \text{ Per ogni } x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{\substack{x < x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} a^x = \inf_{\substack{x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} a^x.$$

Dimostrazione Per la caratterizzazione per successione di sup/inf, esistono due successioni strettamente monotone di razionali $x_n \nearrow x_0$ e $y_n \searrow x_0$ tali che

$$\lim a^{x_n} = \sup_{\substack{x < x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} a^x =: \alpha, \quad \lim a^{y_n} = \inf_{\substack{x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} a^x =: \beta.$$

Chiaramente $\alpha \leq \beta$ e, per l'algebra dei limiti,

$$0 \leq \beta - \alpha = \lim(a^{y_n} - a^{x_n}) = \lim a^{x_n} (a^{y_n - x_n} - 1).$$

Poichè $a^{x_n} \rightarrow \alpha$, la tesi segue se dimostriamo che $a^{z_n} \rightarrow 1$ dove $z_n = y_n - x_n$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $0 < a^{\frac{1}{m}} - 1 < \varepsilon$ (limite notevole). Poichè $z_n \searrow 0$, esiste N tale che $0 < z_n < 1/m$, per ogni $n \geq N$ e quindi, per tali n , $0 < a^{z_n} - 1 < a^{\frac{1}{m}} - 1 < \varepsilon$. ■

Osservazione 1 $f \in C(\mathbb{Q})$. Infatti se $x_0 \in \mathbb{Q}$, $\sup_{\substack{x < x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} a^x \leq a^{x_0} \leq \inf_{\substack{x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} a^x$ e per il Lemma si devono avere le uguaglianze.

È ora naturale estendere “per continuità” la definizione di $f(x) = a^x$ a tutti i numeri reali, ponendo:

Definizione Se $x \in \mathbb{Q}^c$ poniamo $a^x := \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t \in \mathbb{Q}}} a^t$. Se $0 < a \leq 1$ poniamo³ $a^x := 1/(a^{-1})^x$.

La funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ prende il nome di *funzione esponenziale in base a*.

Dimostriamo le proprietà rilevanti della funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$.

(a) La funzione esponenziale con base $a > 1$ è *strettamente crescente*, con base $0 < a < 1$ è *strettamente decrescente*.

Dimostrazione Se $a > 1$, dati $x < y$, siano r e s due razionali tali che $x < r < s < y$, allora

$$a^x = \sup_{\substack{t < x \\ t \in \mathbb{Q}}} a^t \leq a^r < a^s \leq \inf_{\substack{t > y \\ t \in \mathbb{Q}}} a^t = a^y,$$

e quindi, $a^x < a^y$. La stretta decrescenza di a^x per $0 < a < 1$ segue dalla definizione e dal fatto che il reciproco di una funzione strettamente crescente è strettamente decrescente. ■

(b) La funzione esponenziale è *continua*.

¹Eq. (1.74).

²Segue da $\frac{a^x}{x^n} \geq \frac{a^{[x]}}{([x]+1)^n}$, dal limite notevole $a^n/n^n \rightarrow +\infty$, e dal teorema sulla composizione dei limiti.

³Ovviamente, $1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione Sia $a > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $\{x_n\}$ una qualunque successione di numeri reali con limite x_0 . Siano s_n, t_n numeri razionali tali che $x_n - 1/n < s_n < x_n < t_n < x_n + 1/n$; allora, $\lim s_n = \lim t_n = x_0$. Per (a) si ha che $a^{s_n} < a^{x_n} < a^{t_n}$ e poiché $\lim a^{s_n} = \lim a^{t_n} = a^{x_0}$, dal teorema del confronto segue che $\lim a^{x_n} = a^{x_0}$ e per il teorema ponte si ha la tesi. Infine se $a \in (0, 1)$, $a^x = 1/a^{-x}$ è continua⁴. ■

(c) $\forall a > 0, x, y \in \mathbb{R}, a^{x+y} = a^x a^y; \forall x \in \mathbb{R}, a, b > 0, a^x b^x = (ab)^x$.

Dimostrazione Siano s_n, t_n razionali tali che $s_n \rightarrow x$ e $t_n \rightarrow y$. Allora⁵,

$$a^{x+y} = \lim a^{s_n+t_n} = \lim a^{s_n} a^{t_n} = a^x a^y.$$

Analogamente,

$$a^x b^x = \lim a^{s_n} b^{s_n} = \lim (ab)^{s_n} = (ab)^x. \quad \blacksquare$$

Osservazione 2 Da (c) e dalla definizione di esponenziale segue che⁶

$$a^{-x} = (a^x)^{-1} = (a^{-1})^x, \quad \forall a > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

(d) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}, (a^x)^y = a^{xy}$.

Dimostrazione Per $y = 0$ o $x = 0$ la tesi è vera. Siano ora $x, y > 0$ e $a > 1$ e siano s_n, t_n razionali positivi tali che $s_n \nearrow x$ e $t_n \nearrow y$. Allora⁷,

$$(a^{s_n})^{t_n} < (a^x)^{t_n} \rightarrow (a^x)^y;$$

d'altra parte $(a^{s_n})^{t_n} = a^{s_n t_n} \rightarrow a^{xy}$ e quindi, per il teorema del confronto, $a^{xy} \leq (a^x)^y$. Analogamente, se s_n, t_n sono razionali tali che $s_n \searrow x$ e $t_n \searrow y$. Allora

$$a^{s_n t_n} = (a^{s_n})^{t_n} > (a^x)^{t_n} \rightarrow (a^x)^y,$$

e passando al limite si ha $a^{xy} \geq (a^x)^y$, che assieme alla disuguaglianza precedente implica la tesi nel caso $x, y > 0$. Il caso generale segue passando ai denominatori quando occorre ed usando la (3). ■

Esercizio Dimostrare che $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha a^x = +\infty$ e se $a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha a^x = 0$.

⁴Essendo la composizione di funzioni continue continua.

⁵Giustificare ogni passaggio!

⁶La prima uguaglianza segue da $a^x a^{-x} = a^0 = 1$; la seconda segue da $a^x (a^{-1})^x = (aa^{-1})^x = 1^x = 1$.

⁷Se $0 < A < B$ e $x > 0$, allora $A^x < B^x$ essendo equivalente a $(B/A)^x > 1$.