

Limiti laterali e funzione monotòne

Nella definizioni che seguono $a, x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Definizione 1.1 Un ‘intorno sinistro’ di $x_0 > -\infty$ è un intervallo della forma (a, x_0) con $a < x_0$.

Un ‘intorno destro’ di $x_0 < +\infty$ è un intervallo della forma (x_0, a) con $a > x_0$.

$x_0 > -\infty$ è un ‘punto di accumulazione da sinistra’ per A se

$$\forall U \text{ intorno sinistro di } x_0, \quad U \cap A \neq \emptyset.$$

$x_0 < +\infty$ è un ‘punto di accumulazione da destra’ per A se

$$\forall U \text{ intorno destro di } x_0, \quad U \cap A \neq \emptyset.$$

L’insieme dei punti di accumulazione in $\mathbb{R}^*$ da sinistra di A si denota $\mathcal{D}_-^* A$; l’insieme dei punti di accumulazione in $\mathbb{R}^*$ da destra di A si denota $\mathcal{D}_+^* A$; la notazione senza asterisco indica i punti di accumulazione finiti (ossia in $\mathbb{R}$).

Si noti che

$$\mathcal{D}^* A = \mathcal{D}_-^* A \cup \mathcal{D}_+^* A.$$

Sia ora $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Definizione 1.2 Sia $x_0 \in \mathcal{D}_-^* A$ e $L \in \mathbb{R}^*$. Diremo che $L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (‘ L è il limite di f per x che tende a x_0 da sinistra’) se

$$\forall V \text{ intorno di } L \quad \exists U \text{ intorno sinistro di } x_0 \mid f(x) \in V, \forall x \in U \cap A. \quad (1)$$

Sia $x_0 \in \mathcal{D}_+^* A$ e $L \in \mathbb{R}^*$. Diremo che $L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (‘ L è il limite di f per x che tende a x_0 da destra’) se

$$\forall V \text{ intorno di } L \quad \exists U \text{ intorno destro di } x_0 \mid f(x) \in V, \forall x \in U \cap A. \quad (2)$$

Definizione 1.3 Si dice che f ‘conserva l’ordine’ o che ‘è crescente’ se

$$x, y \in A, \quad x \leq y \quad \implies \quad f(x) \leq f(y).$$

si dice che f ‘inverte l’ordine’ o è ‘decrecente’ se

$$x, y \in A, \quad x \leq y \quad \implies \quad f(x) \geq f(y).$$

f si dice monotòna se è crescente o decrecente.

f si dice ‘strettamente monotòna’ [crescente, decrecente] se è monotòna [crescente, decrecente] e iniettiva¹.

Teorema 1.4 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora²,

$$x_0 \in \mathcal{D}_-^* A \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{A \cap (-\infty, x_0)} f. \quad (3)$$

$$x_0 \in \mathcal{D}_+^* A \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{A \cap (x_0, +\infty)} f. \quad (4)$$

¹ f iniettiva $\iff f(x) = f(y) \implies x = y$.

² Notazione: $\sup_B f := \sup\{f(x) \mid x \in B\}$; $\inf_B f := \inf\{f(x) \mid x \in B\}$

Dimostrazione Dimostriamo³ (3). Sia $L := \sup_{A \cap (-\infty, x_0)} f$ e consideriamo prima il caso $L \in \mathbb{R}$. Sia $V = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ un intorno simmetrico qualunque di L . Per la caratterizzazione dell'estremo superiore segue che esiste $\bar{x} \in A \cap (-\infty, x_0)$ tale che $L - \varepsilon < f(\bar{x})$. Allora, poiché f è crescente, per ogni $x \in A$ con $\bar{x} < x < x_0$, si ha

$$L - \varepsilon < f(\bar{x}) \leq f(x) \leq L,$$

e quindi $f(x) \in V$ e la (1) segue con $U := (\bar{x}, x_0)$.

Consideriamo ora il caso $L = +\infty$ e sia $V = (M, +\infty)$ un intorno qualunque di $+\infty$. Poiché f non è limitata superiormente, esiste $\bar{x} \in A$ tale che $M < f(\bar{x})$ e poiché f è crescente, se $x \in A$ con $\bar{x} < x < x_0$, si ha

$$M < f(\bar{x}) \leq f(x),$$

e quindi $f(x) \in V$ e la (1) segue, di nuovo, con $U := (\bar{x}, x_0)$. ■

Es 1 Si dimostri che se $x_0 \in \mathcal{D}_- A \cap \mathcal{D}_+ A$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

Es 2 Si dimostri la (4).

Es 3 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione decrescente. Si dimostri che

$$x_0 \in \mathcal{D}_-^* A \implies \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf_{A \cap (-\infty, x_0)} f, \quad (5)$$

$$x_0 \in \mathcal{D}_+^* A \implies \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{A \cap (x_0, +\infty)} f. \quad (6)$$

Es 4 (i) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}_- A$ [risp., $x_0 \in \mathcal{D}_+ A$]. Dimostrare che se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = L \in \mathbb{R}$ [risp., $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = L \in \mathbb{R}$], allora si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno sinistro [risp., destro] U di x_0 tale che

$$\sup_{A \cap U} f - \inf_{A \cap U} f < \varepsilon.$$

(ii) Dimostrare che, in nessun punto, esistono i limiti laterali di $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

³La dimostrazione di (4) è analoga e viene lasciata per esercizio (Es 2).