

1 Limite superiore e inferiore

Definizione 1 Data una successione $\{a_n\}$, definiamo, per ogni $n \geq 1$, $\bar{a}_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ e chiamiamo **limite superiore** (o ‘limsup’, o ‘massimo limite’) di $\{a_n\}$ l’elemento di \mathbb{R}^* dato da¹:

$$\limsup a_n := \overline{\lim} a_n := \inf\{\bar{a}_n \mid n \geq 1\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{a}_n. \quad (1)$$

Analogamente, si definisce il **limite inferiore** (o ‘liminf’, o ‘minimo limite’) di $\{a_n\}$ l’elemento di \mathbb{R}^* dato da

$$\liminf a_n := \underline{\lim} a_n := \sup\{\underline{a}_n \mid n \geq 1\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{a}_n, \quad \text{dove } \underline{a}_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}. \quad (2)$$

Cominciamo col discutere il caso del limite superiore.

Si noti che se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, $\bar{a}_n = +\infty$ per ogni n e quindi $\overline{\lim} a_n = +\infty$, mentre se $\{a_n\}$ è limitata superiormente allora $\bar{a}_n \in \mathbb{R}$ per ogni n .

Proposizione 1.1 Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in \mathbb{R} .

- (i) Esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $\lim a_{n_k} = \overline{\lim} a_n$.
- (ii) Se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione regolare² di $\{a_n\}$, allora $\lim a_{n_k} \leq \overline{\lim} a_n$.

Dimostrazione Se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, la tesi segue dal Lemma 6.3.

Sia ora $\{a_n\}$ limitata superiormente e sia $\ell = \overline{\lim} a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Per ogni $n \geq 1$, sia $m_n \geq n$ tale che³ $a_{m_n} > \bar{a}_n - \frac{1}{n}$. Per il Lemma 6.3 (poiché $m_n \rightarrow +\infty$) esiste una sottosuccessione $\{m_{n_k}\}$ di $\{m_n\}$ strettamente crescente e tale che $m_{n_k} \rightarrow +\infty$. Allora la sottosuccessione $\{a_{m_{n_k}}\}$ verifica

$$\bar{a}_{n_k} - \frac{1}{n_k} < a_{m_{n_k}} \leq \bar{a}_{n_k},$$

e quindi, poiché $\lim \bar{a}_{n_k} = \ell$ (per il teorema ponte) si ha anche che $\lim a_{m_{n_k}} = \ell$.

- (ii) Segue immediatamente prendendo il limite nella relazione $a_{n_k} \leq \bar{a}_{n_k}$. ■

Naturalmente vale un’affermazione analoga nel caso del limite inferiore (la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio⁴):

Proposizione 1.2 Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in \mathbb{R} .

- (i) Esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $\lim a_{n_k} = \underline{\lim} a_n$.
- (ii) Se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione regolare di $\{a_n\}$, allora $\lim a_{n_k} \geq \underline{\lim} a_n$.

Definizione 2 Data una successione $\{a_n\}$, definiamo $\mathcal{L}_{\{a_n\}}$ l’insieme dei possibili limiti

(per sottosuccessioni) di $\{a_n\}$, ossia, il sottoinsieme di \mathbb{R}^* dato da

$$\mathcal{L}_{\{a_n\}} := \{L \in \mathbb{R}^* \mid \exists \{a_{n_k}\} \text{ per cui } \lim a_{n_k} = L\}. \quad (3)$$

Dalle Proposizioni 1.1 e 1.2 segue che se $\{a_n\}$ è una successione a valori in \mathbb{R} , allora:

- (i) $\overline{\lim} a_n = \max \mathcal{L}_{\{a_n\}}$ e $\underline{\lim} a_n = \min \mathcal{L}_{\{a_n\}}$
- (ii) $\{a_n\}$ è regolare con limite $L \in \mathbb{R}^* \iff \mathcal{L}_{\{a_n\}} = \{L\} \iff \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = L$.

¹Si osservi che, poiché $\{a_k \mid k \geq n+1\} \subseteq \{a_k \mid k \geq n\}$, la successione \bar{a}_n è decrescente.

²Ossia, con limite in \mathbb{R}^* .

³Tale m_n esiste per la Proposizione 1.93.

⁴Es. 1.

Esercizi

Es 1* Si dimostri la Proposizione 1.2.

Es 2 Si calcolino il massimo e minimo limite delle seguenti successioni⁵

- (i) $1 + (-1)^{\lfloor n/3 \rfloor}$;
- (ii) $\frac{n+1}{3n-1} + \tanh(n \operatorname{sen}(\pi n/4))$;
- (iii) $(-1)^{\lfloor \frac{2}{3}n \rfloor} + (-1)^{\lfloor \frac{4}{3}n \rfloor}$
- (iv) $\operatorname{sen} a_n$ con $a_n := \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n^2} (-1)^{k+1}$
- (v) $\operatorname{sen} \frac{n^2\pi}{4} \cdot \cos \frac{n\pi}{3}$
- (vi) $\left\{ \frac{n^2}{5} \right\}$
- (vii) $\left\{ \frac{n}{4} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{n}{4} \right\}$
- (viii) $n \operatorname{sen}(n\pi/2024)$

Es 3 Si considerino le successioni degli Es 2 e degli esercizi da 96 a 110 di [GE, cap 3]. Per ogni successione $\{a_n\}$ di tali esercizi si calcoli l'insieme dei possibili limiti $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\{a_n\}}$.

Es 4* Sia $\{a_n\}$ una numerazione di \mathbb{Q} (ossia $\{a_n\}$ è una successione iniettiva la cui immagine è \mathbb{Q}). Dimostrare che $\mathcal{L}_{\{a_n\}} = \mathbb{R}^*$.

Es 5* (limsup e liminf di funzioni) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}^*A$. Sia $U_n = (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$, $U_n = (n, +\infty)$ se $x_0 = +\infty$ e $U_n = (-\infty, -n)$ se $x_0 = -\infty$. Definiamo poi

$$\begin{aligned} \bar{a}_n &:= \sup\{f(x) \mid x \in A \cap U_n\}, & \underline{a}_n &:= \inf\{f(x) \mid x \in A \cap U_n\}, \\ \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f &:= \inf \bar{a}_n = \lim \bar{a}_n, & \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f &:= \sup \underline{a}_n = \lim \underline{a}_n, \\ \mathcal{L}_f(x_0) &:= \{L \in \mathbb{R}^* \mid \exists x_n \in A \text{ per cui } \lim x_n = x_0 \text{ e } \lim f(x_n) = L\}. \end{aligned}$$

Dimostrare che:

- (i) esistono due successioni in A , $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, che tendono a x_0 e tali che $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f = \lim f(x_n)$ e $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f = \lim f(y_n)$;
- (ii) se $L \in \mathcal{L}_f$ allora $\underline{\lim} f \leq L \leq \overline{\lim} f$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L$ se e solo se $\mathcal{L}_f = \{L\}$.

Es 6 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}^*A$. Siano $M_n \in \mathbb{R}$ tali che $\lim M_n = +\infty$; siano $r_n > 0$ tali che $\lim r_n = 0$ e si definisca:

$$V_n = (x_0 - r_n, x_0 + r_n) \text{ se } x_0 \in \mathbb{R}, \quad V_n = (M_n, +\infty) \text{ se } x_0 = +\infty \text{ e } V_n = (-\infty, -M_n) \text{ se } x_0 = -\infty;$$

$$\bar{a}'_n := \sup\{f(x) \mid x \in A \cap V_n\}, \quad \underline{a}'_n := \inf\{f(x) \mid x \in A \cap V_n\};$$

Si dimostri che $\lim \bar{a}_n = \lim \bar{a}'_n$ e che $\lim \underline{a}'_n = \lim \underline{a}_n$ (in altri termini, la definizione di limsup e liminf 'non dipende dalla particolare successione di intorni di x_0 ').

Es 7 Si calcoli:

- (i) $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
- (ii) $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \{x\}$ e $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \{x\}$
- (iii) $\mathcal{L}_f(+\infty)$ con $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

⁵Come al solito, $[\cdot]$ è la parte intera di x e $\{x\} = x - [x]$ è la parte frazionaria di x .