

Dispense di AM110/Analisi Matematica I - modulo 1

Coerentemente con il diario delle lezioni presente alla pagina del corso:

<http://www.mat.uniroma3.it/users/esposito/corsi/2023-2024/AM110.html>,

si riportano sotto i contenuti di carattere teorico da conoscere ai fini dell'esame orale del corso. Per facilitare la preparazione, per ognuno degli argomenti è riportato un preciso riferimento bibliografico tratto da

L. Chierchia, *Corso di analisi. Prima parte. Una introduzione rigorosa all'analisi matematica su $\mathbb{R}$* , McGraw-Hill Education 2009, XI+374 pp.

oppure una **concisa argomentazione** che riassume quanto presentato in maniera estesa a lezione.

Numeri reali

Unione ed intersezione di insiemi (Def. 1.1 e 1.4); dominio e co-dominio di una funzione, funzioni iniettive, suriettive e biunivoche (Def. 1.5-(ii)); assiomi di $\mathbb{R}$ (par. 1.2); definizione e proprietà del valore assoluto (par. 1.3.1); costruzione di $\mathbb{N}$ come il più piccolo insieme induttivo in $\mathbb{R}$ (Def. 1.20 e Oss. 1.21); principio di induzione (Prop 1.22 e Oss. 1.23); disuguaglianza di Bernoulli (Lemma 1.38); binomio di Newton (Def. 1.42, Lemma 1.43 e Prop. 1.44, solo enunciati); funzione inversa (Def. 1.45 e Oss. 1.46); richiami sulla costruzione dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e razionali $\mathbb{Q}$ a partire dai numeri naturali $\mathbb{N}$ (Def. 1.62 e 1.67); $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Prop. 1.87); proprietà archimedeica (Prop. 1.97, solo enunciato); esistenza di $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$:

Dati $A = \{x > 0 : x^2 < 2\}$ e $B = \{x > 0 : x^2 > 2\}$, abbiamo che $x^2 < 2 < y^2$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$. Siccome $x, y > 0$ otteniamo che $x < y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$. Dall'assioma di completezza sia $s \in \mathbb{R}$ l'elemento separatore di A e B . Siccome $1 \in A$ osserviamo che $s \geq 1 > 0$ ed inoltre $s^2 = 2$, ossia $s = \sqrt{2}$. Infatti, se fosse vero $s^2 < 2$, grazie alla proprietà archimedeica avremmo che $(s + \frac{1}{n})^2 = s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leq s^2 + \frac{2s+1}{n} < 2$ per $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{2s+1}{2-s^2}$, giungendo alla contraddizione $s < s + \frac{1}{n} \in A$. Analogamente si può escludere $s^2 > 2$ e quindi necessariamente vale $s^2 = 2$;

estremo superiore/inferiore in $\mathbb{R}$ (Def 1.7, Def. 1.89, Oss. 1.90, Prop. 1.91, Prop. 1.93 e Def. 2.3); parte intera e frazionaria (Def. 1.98); radice n-esima (Def. 1.102, Teor. 1.103, solo enunciato); funzioni crescenti e decrescenti (Def. 1.114).

Teoria dei limiti

Limite di successione ((2.4)); teorema del confronto (Teor. 2.33, solo enunciato); algebra dei limiti (Prop. 2.25, solo enunciato, ristretto a limiti di successioni); algebra dei limiti estesa e forme indeterminate (Prop. 2.27, solo enunciato, e Oss. 2.28, ristretti a limiti di successioni);

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$ per ogni $p \in \mathbb{N}$ e $a > 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $p \in \mathbb{N}$ e $a > 0$ (Prop. 2.35); $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log n)^p}{n} = 0$ per ogni $p \in \mathbb{N}$:

Sia $x_n \rightarrow +\infty$ e $a > 1$. Se $k_n = [x_n]$, abbiamo che $k_n \leq x_n < k_n + 1$ implica

$$\frac{1}{a} \frac{k_n^p}{a^{k_n}} = \frac{k_n^p}{a^{k_n+1}} \leq \frac{x_n^p}{a^{x_n}} \leq \frac{(k_n+1)^p}{a^{k_n}} = a \frac{(k_n+1)^p}{a^{k_n+1}}$$

per monotonia. Siccome k_n e $k_n + 1$ sono delle sottosuccessioni dei numeri naturali che tendono a $+\infty$, da $a > 1$ otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n^p}{a^{k_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(k_n+1)^p}{a^{k_n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

Dal Teorema del confronto otteniamo quindi che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^p}{a^{x_n}} = 0$ per ogni $a > 1$. Applicato a $a = e$ e $x_n = \log n \rightarrow +\infty$ fornisce

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log n)^p}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log n)^p}{e^{\log n}} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0:$$

Poiché $a < [a] + 1$, abbiamo che

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]} \cdot \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n-1} \frac{a}{n} \leq \frac{a^{[a]}}{[a]!} \frac{a}{n} \rightarrow 0$$

e

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

e quindi la tesi segue dal Teorema del confronto;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty:$$

Dato $M > 1$, da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$ otteniamo che $\frac{M^n}{n!} \leq 1$ per n grande, ossia $\sqrt[n]{n!} \geq M$ per $n \geq N$. Per definizione otteniamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$;

validità dei precedenti limiti notevoli per $0 < p \in \mathbb{R}$:

Siccome $[p] \leq p < [p] + 1$, abbiamo che $\frac{n^{[p]}}{a^n} \leq \frac{n^p}{a^n} \leq \frac{n^{[p]+1}}{a^n}$ per monotonia. Essendo $[p], [p] + 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, per $a > 1$ vale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{[p]}}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{[p]+1}}{a^n} = 0$$

e dal Teorema del confronto segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$. Si procede in modo analogo nel caso degli altri limiti notevoli;

definizione del numero di Nepero (Def. 2.37); punto di accumulazione (Def. 2.13-(iii)); definizione di limite funzionale (Def. 2.14 e discussione dei casi (i)-(iv)); teorema sulla permanenza del segno (Teor. 2.16 e Prop. 2.17, solo enunciati); teorema del confronto (Teor. 2.18, solo enunciato); limiti destro/sinistro e relazione con il limite completo (Def. 2.19, Oss.

2.20 e Prop. 2.22, solo enunciato); algebra dei limiti (Prop. 2.25, solo enunciato); algebra dei limiti estesa e forme indeterminate (Prop. 2.27, solo enunciato, e Oss. 2.28); teorema ponte (Prop. 2.41, solo enunciato); continuità di una funzione (Def. 2.47); algebra delle funzioni continue (Oss. 2.48-(iv)); teorema degli zeri (Teor. 2.51, solo enunciato); discussione dei vari tipi di discontinuità (Def. 2.56 e Oss. 2.57); continuità della funzione composta (Prop. 2.58, solo enunciato); continuità della funzione inversa (Teor. 2.66, solo enunciato).

Esponenziali e logaritmi

Esponenziali e proprietà degli esponenziali (Def. 3.3 e Prop. 3.4-(i)-(ii)-(iii)-(vi)); continuità degli esponenziali:

Da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $x_n \rightarrow +\infty$ (dal confronto tra x_n e $k_n = [x_n]$). Dal Teorema ponte otteniamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$. Siccome $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{\frac{1}{x}} = [\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{-\frac{1}{x}}]^{-1} = 1$, passando a $\frac{1}{x}$ otteniamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = 1$ e quindi $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$. Infine abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} a^y = a^{x_0}$$

mediante il cambio di variabile $y = x - x_0$;

confronto tra ordini di infinito (Prop. 3.4-(vii), provato direttamente usando il Teorema ponte); proprietà delle potenze reali (Oss. 3.5); logaritmi e proprietà dei logaritmi (Def 3.6, Oss. 3.7, Prop. 3.8 da (i) a (viii)); continuità dei logaritmi:

Dato $x_0 > 0$, osservo che $|\log x - \log x_0| \leq \epsilon$ equivale a $-x_0(1 - e^{-\epsilon}) \leq x - x_0 \leq x_0(e^\epsilon - 1)$. Ponendo $\delta = x_0 \min\{1 - e^{-\epsilon}, e^\epsilon - 1\} > 0$ per $\epsilon > 0$, abbiamo che $|x - x_0| \leq \delta$ implica $-x_0(1 - e^{-\epsilon}) \leq x - x_0 \leq x_0(e^\epsilon - 1)$. Abbiamo quindi $|\log x - \log x_0| \leq \epsilon$ per ogni $|x - x_0| \leq \delta$ e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} \log x = \log x_0$;

confronto tra ordini di infinito (Prop. 3.8-(x), provato direttamente usando il Teorema ponte); grafico di x^α , esponenziali e logaritmi (Fig. 3.1, Fig. 3.2, Fig. 3.3); limiti notevoli di esponenziali e logaritmi (par. 3.5 (a)-(g)).

Serie esponenziali e funzioni trigonometriche

Richiami sulle funzioni $\sin x$ e $\cos x$: definizione geometrica, 2π -periodicità, alcuni valori speciali; formule di addizione ((5.24) e (5.36)); formule di duplicazione ((5.37) e (5.42)); continuità delle funzioni seno e coseno:

Dalla disuguaglianza geometrica $|\sin x| \leq |x|$ e dalla formula di duplicazione del coseno otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right] = 1.$$

Dalle formule di addizione otteniamo infine che

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x &= \lim_{x \rightarrow x_0} [\cos(x - x_0) \sin x_0 + \sin(x - x_0) \cos x_0] = \sin x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x &= \lim_{x \rightarrow x_0} [\cos(x - x_0) \cos x_0 - \sin(x - x_0) \sin x_0] = \cos x_0;\end{aligned}$$

limiti notevoli di seno e coseno ((5.22), solo enunciato), grafico (Fig. 5.1); richiami sulle funzioni $\operatorname{tg}(x)$ e $\operatorname{ctg}(x)$: definizione geometrica e analitica (Def. 5.21), π -periodicità, grafico (Fig. 5.2); funzioni trigonometriche inverse (Prop. 5.22, solo enunciato, par. 5.3).

Derivate e primitive

Derivabilità di una funzione (Def. 7.1, Oss. 7.2 (i)-(ii)); derivata di alcune funzioni elementari (Esem. 7.3); derivabilità implica continuità (Oss. 7.4); non derivabilità della funzione $|x|$ (Esem. 7.6); regole di derivazione: derivata di somma, prodotto e quoziente (Prop. 7.9 e Prop. 7.10, solo enunciati), derivata della composizione e della funzione inversa (Prop. 7.11 e Prop. 7.12, solo enunciati); derivata di varie funzioni elementari (Esem. 7.13, tabella 7.1); Teorema di Cauchy (Prop. 7.25, solo enunciato); Teorema di Lagrange (Prop. 7.26, solo enunciato) e significato geometrico; legame tra segno della derivata e monotonia e studio dei massimi/minimi relativi (Prop. 7.20, Cor. 7.29); sugli intervalli le funzioni a derivata nulla sono costanti (Cor. 7.27, Oss. 7.28); formula di de L'Hôpital (Teor. 7.31, solo enunciato eccetto caso 1) con dimostrazione); funzione primitiva o integrale indefinito (Def. 7.36, Oss. 7.37-(i)-(ii)-(iii)); primitive di alcune funzioni elementari (tabella 7.2); linearità dell'integrale indefinito (Prop. 7.38); integrazione per parti e cambio di variabile (Prop. 7.40, Prop. 7.41); integrazione di funzioni razionali con il metodo dei fratti semplici (pagg. 211-214); derivata seconda (Def. 7.43); legame tra derivata seconda e convessità di una funzione (Prop. 7.55, solo enunciato); analisi qualitativa di grafici (par. 7.8); formula di Taylor (Prop. 7.78, Lem. 7.79, Teor. 7.81-(i)-(ii)); sviluppo di Taylor per alcune funzioni elementari (Esem. 7.84-(i)); sviluppo di Taylor al second'ordine (Prop. 7.75) e criterio per determinare massimi/minimi locali:

Sia f una funzione derivabile due volte in x_0 con $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Dallo sviluppo di Taylor al second'ordine: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ per $x \rightarrow x_0$, otteniamo che $f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}[f''(x_0) + o(1)] \geq f(x_0)$ per x vicino a x_0 poiché $f''(x_0) > 0$. La funzione $f(x)$ ha quindi un minimo locale in x_0 . Analogamente, se $f''(x_0) < 0$, la funzione $f(x)$ ha un massimo locale in x_0 .

Teoria dell'integrazione di Riemann

Integrale definito di una funzione continua: somme di Riemann e interpretazione geometrica (Def. 8.1-(iv)), integrabilità secondo Riemann (Def. 8.4), integrabilità delle funzioni continue (Prop. 8.19-(i), solo enunciato); Teorema fondamentale del calcolo integrale (Def. 8.22, Teor. 8.23, Def. 8.24, Cor. 8.25); proprietà dell'integrale definito (Prop. 8.11-(i)-(iii)-(iv)-(v), dedotti direttamente dal Teorema fondamentale del calcolo); integrazione per parti (Cor.

8.27, Oss. 8.28); integrazione per sostituzione (Cor. 8.29, Oss. 8.30); integrazione di funzioni razionali in seno e coseno:

Se poniamo $t = \tan \frac{x}{2}$, abbiamo che

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

e quindi

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} \Big|_{t=\tan \frac{x}{2}}.$$

Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in t che può essere integrata con il metodo dei fratti semplici;

integrazione di funzioni razionali quadratiche in seno e coseno:

Se poniamo $t = \tan x$, abbiamo che

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

e quindi

$$\int \mathcal{R}(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} \Big|_{t=\tan x}.$$

Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in t che può essere integrata con il metodo dei fratti semplici;

integrazione di radicali in $\frac{ax+b}{cx+d}$:

Se poniamo $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ con $m = mcm(m_1, \dots, m_k)$, abbiamo che

$$\int \mathcal{R}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_k}{m_k}}\right) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{\frac{n_1 m}{m_1}}, \dots, t^{\frac{n_k m}{m_k}}\right) \left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}\right)' dt \Big|_{t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}}$$

poiché $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$. Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in t che può essere integrata con il metodo dei fratti semplici;

integrazione di radicali in $ax^2 + bx + c$:

Caso $a > 0$: poniamo $ax^2 + bx + c = a(x+t)^2$, ossia $t = \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} - x$, ottenendo

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{at^2 - c}{b - 2at}, \sqrt{a} \frac{-at^2 + bt - c}{b - 2at}\right) \left(\frac{at^2 - c}{b - 2at}\right)' dt \Big|_{t=\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} - x}$$

poiché $x = \frac{at^2 - c}{b - 2at}$. Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in t che può essere integrata con il metodo dei fratti semplici.

Caso $a < 0$: affinché $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ abbia senso in qualche regione di $\mathbb{R}$, è necessario che $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Siccome $ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}[1 - \frac{4a^2}{\Delta}(x + \frac{b}{2a})^2]$, poniamo $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \sin t$ ottenendo

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \int \mathcal{R}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \sin t - \frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{|a|}} \cos t\right) \cos t dt \Big|_{t=\arcsin[\frac{2|a|}{\sqrt{\Delta}}(x + \frac{b}{2a})]}$$

poiché $t = \arcsin[\frac{2|a|}{\sqrt{\Delta}}(x + \frac{b}{2a})]$. Se $\mathcal{R}$ è una funzione razionale, dopo il cambio di variabile l'integranda è una funzione razionale in $\sin t$ e $\cos t$ che può essere integrata utilizzando l'ulteriore cambio di variabile $s = \tan \frac{t}{2}$ oppure $s = \tan t$.

Equazioni differenziali ordinarie

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (par. A.7.1); equazioni a variabili separabili (parr. A.7.2 e A.7.3); equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine: caso omogeneo (pp. 326-327), soluzione particolare nel caso non omogeneo tramite similarità:

Vogliamo trovare una soluzione particolare $\bar{x}(t)$ dell'equazione $ax'' + bx' + cx = f(t)$, nel caso $f(t)$ abbia la forma speciale $f(t) = e^{\alpha t}[P_1(t) \cos(\beta t) + Q_1(t) \sin(\beta t)]$ con $P_1(t), Q_1(t)$ due polinomi assegnati. Dato il polinomio caratteristico $P(x) = ax^2 + bx + c$, discutiamo solo il caso in cui $\lambda = \alpha + i\beta$ soddisfi $P(\lambda) \neq 0$. Per similarità cerchiamo la soluzione particolare $\bar{x}(t)$ nella forma:

$$\bar{x}(t) = e^{\alpha t}[P_2(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t)]$$

per un'opportuna scelta dei due polinomi $P_2(t), Q_2(t)$ di grado al più pari al grado massimo tra quello di $P_1(t)$ e $Q_1(t)$. I due polinomi $P_2(t)$ e $Q_2(t)$ sono incogniti e vanno determinati inserendo l'espressione di $\bar{x}(t)$ nell'equazione

e tramite il metodo di variazione delle costanti:

Vogliamo trovare una soluzione particolare $\bar{x}(t)$ dell'equazione $ax'' + bx' + cx = f(t)$ partendo dalla soluzione generale dell'equazione omogenea $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$. Nel metodo di variazione delle costanti introduciamo in c_1 e c_2 una dipendenza dal tempo e cerchiamo $\bar{x}(t)$ nella forma:

$$\bar{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

ove $c_1(t)$ e $c_2(t)$ sono due funzioni incognite da determinare. Se imponiamo $c'_1x_1 + c'_2x_2 = 0$, abbiamo che $\bar{x}' = c_1x'_1 + c_2x'_2$ e $\bar{x}'' = c'_1x'_1 + c_1x''_1 + c'_2x'_2 + c_2x''_2$, che inseriti nell'equazione forniscono

$$a\bar{x}'' + b\bar{x}' + c\bar{x} = ac'_1x'_1 + ac'_2x'_2 + c_1(ax''_1 + bx'_1 + cx_1) + c_2(ax''_2 + bx'_2 + cx_2) = ac'_1x'_1 + ac'_2x'_2$$

essendo x_1 e x_2 due soluzioni dell'equazione omogenea. Quindi $\bar{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ sarà una soluzione particolare se $c_1(t)$ e $c_2(t)$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} c'_1x_1 + c'_2x_2 = 0 \\ ac'_1x'_1 + ac'_2x'_2 = f. \end{cases}$$

Esplicitando c'_1 e c'_2 abbiamo che

$$c'_1(t) = \frac{f(t)x_2(t)}{a[x'_1(t)x_2(t) - x'_2(t)x_1(t)]}, \quad c'_2(t) = \frac{f(t)x_1(t)}{a[x'_2(t)x_1(t) - x'_1(t)x_2(t)]}$$

e quindi le due funzioni incognite $c_1(t)$ e $c_2(t)$ vanno determinate per integrazione in t ; oscillatore armonico e fenomeno della risonanza (pagg. 392–398 in Analisi Matematica 1, III edizione, E. Giusti, Bollati Boringhieri).