AM120 AA 23-24: Programma dettagliato

I riferimenti tra parentesi quadrate sono al testo [C].

* significa: "dimostrazione facoltativa per i fisici" (NB: l'enunciato invece è in programma per tutti!)

** significa: "dimostrazione facoltativa per tutti"

Assiomi di $\mathbb{R}$. Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Assiomi dei numeri reali. [Par 1.2 e inizio par 1.3]. Insiemi contigui.

Proprietà algebriche elementari [Par 1.3 tutto (Proposizione 1.11^{*})].

Assioma di Dedekind ed estremo superiore/inferiore [Par 1.6; Osservazione 1.92^{*}].

Numeri naturali e principio di induzione [par 1.4.1 tutto; Proposizione 1.25^{*}; Proposizione 1.28^{*}].

Teorema di ricorsione^{**} e definizione ricorsive [par 1.4.2].

Somme geometriche e binomio di Newton [par 1.4.2 e 1.4.3]

Numeri interi e razionali [Sez 1.5 fino a par 1.5.1].

Radici e potenze con esponente razionale [par 1.8 fino a 1.8.1; Teorema 1.103^{*}].

Caratterizzazione di sup e inf [Proposizione 1.93].

Proposizione 1.95 (massimo di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$) e Proposizione 1.97 (proprietà archimedeo).

Parte intera, parte frazionaria e densità dei razionali in $\mathbb{R}$ [Prop. 1.100].

Dimostrazione della Proposizione 1.25^{*} (Tra due naturali non ci sono naturali);

Corollario 1.26 (se $n > m$ allora $n \geq m + 1$); dimostrazione della Proposizione 1.27^{*} (Se $n > m$ allora $n - m \in \mathbb{N}$).

Teoria dei limiti

Definizioni di: $\pm \infty$, retta estesa ($\mathbb{R}^*$), intervalli, intorni, punti isolati, punti di accumulazione, punti interni,

insieme aperto (insieme vuoto o costituito da tutti punti interni), insieme chiuso (complementare di un insieme aperto)

[sez 2.1, 2.2 e 2.3]

Intorni laterali. Limiti laterali e funzioni monotone [[file](#) oppure par 2.5]

Insiemi finiti e infiniti [par 1.4.4: Lemma 1.50^{*}, Corollario 1.51 (cardinalità di insiemi finiti),

Proposizione 1.53^{*}]

Numerabilità [fine par 1.4.4 e Osservazione 1.68 (numerabilità di $\mathbb{Q}$)]

Algebra dei limiti [par 2.6]. Definizione di continuità [Def 2.47 e Osservazione 2.48].

Definizioni e proprietà (solo enunciati) delle principali funzioni analitiche elementari; vedi [file](#).

Definizione del numero di Eulero e [par 2.7.2, Lemma 2.36^{*}].

Serie e successioni

Definizione di serie [Def 4.6]. Esempi [Esempi 4.1, 4.2, 4.3].

Proprietà elementari [Proposizione 4.8, punti (i), (ii), (iv) e (v)].
Criteri per serie a termini positivi: confronto, rapporto, radice [Par 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3].
Criterio del confronto asintotico [Proposizione 4.21, (ii)].
Discussione di alcuni esercizi di [GE] p. 90 (serie a termini positivi).
Stime su $n!$, divergenza della serie armonica, convergenza della serie di Riemann [vedi file](#)
Criterio di condensazione di Cauchy* [par 4.3.4].
Serie a termini reali: criterio di convergenza assoluta [Prop 4.8-(vi)];
criterio di Leibniz per serie a segni alterni [vedi [file](#)].

Caratterizzazioni in termini di successioni di: estremo superiore [vedi [file](#)]; derivato di un insieme [Proposizione 2.40];
limite di funzioni ("Teorema ponte") [Proposizione 2.41].
Limiti notevoli [Proposizione 2.35 ed estensioni a $\mathbb{R}$ tramite monotonia]

Teoremi fondamentali sulle funzioni continue

Teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue [[file](#)].
Teorema dei valori intermedi [Teorema 2.53].
Funzioni continue mandano intervalli in intervalli [Corollario 2.54].
Funzioni continue e intervalli [[file](#) (la Proposizione 1 è con asterisco).
Composizione e limiti [Par 2.58, Proposizione 2.58*]
Sottosuccessioni e Teorema di Bolzano-Weierstrass [Teorema 6.4].
Teorema di Weierstrass su intervalli.
Funzioni lipschitziane [Def 6.46] e funzioni uniformemente continue [Def 6.45].
Teorema di Heine-Cantor su intervalli [[file](#)].
Successioni di Cauchy [par 6.2].
Funzioni uniformemente continue mandano successioni di Cauchy in successioni di Cauchy;
limiti di funzioni uniformemente continue [Proposizione 6.48].

Funzioni esponenziali e trigonometriche

Funzioni esponenziali [[file](#)].
Funzioni logaritmiche [Proposizione 3.8].
Limiti notevoli di funzioni esponenziali/logaritmiche [Par 3.5]
Serie doppie. Teorema discreto di Fubini (Proposizione 5.11*). Esempi e controesempi.
Serie esponenziale (Definizione 5.1). La serie esponenziale coincide con e^x (Teorema 5.3).
Irrazionalità di e [vedi [file](#)].
Espansione in serie delle funzioni iperboliche [Formule (5.6) e dimostrazione p. 145].
Definizione per serie di seno e coseno. Parità delle funzioni trigonometriche; limiti notevoli per x che tende a 0.
Formula di addizione per il coseno [Teorema 5.10*].
Definizione analitica di π [[file](#)].
Proprietà elementari di seno e coseno [incluso: Proposizione 5.17, Teorema 5.19].

Derivate

Definizione di derivata. Calcolo di alcune derivate elementari (seno, coseno, esponenziali).
Rapporto incrementale; il rapporto incrementale di f è positivo se e solo se f è crescente; se f è crescente e derivabile in x , allora $f'(x) \geq 0$. [Proposizione 7.20].
Regole di derivazione: derivazione di somma, prodotto, reciproco e rapporto; regola della catena [Proposizione 7.11*].

Derivata della funzione inversa [Proposizione 7.12*]. Esempi (derivate di funzioni trigonometriche e iperboliche inverse)
Teoremi elementari sulle derivate: Fermat, Rolle, Cauchy e Lagrange; conseguenze del Teorema di Lagrange. [Par 7.3 tutto].

Definizione di derivate di ordine superiore [Definizione 7.9.1, Osservazione 7.70 ed Esempio 7.71].

Funzioni differenziabili convesse [[file](#) (la Proposizione è con asterisco)].

L'integrale di Riemann

Intervalli ed insiemi elementari [[file](#)]

Funzioni a scalini e loro integrale [[file](#)] (gli asterischi sono indicati nel file).

Funzioni Riemann integrabili e criterio di integrabilità per successioni [[file](#)]

Proprietà dell'integrale di Riemann. Partizioni e criterio di integrabilità per partizioni. [[file](#)]

Il teorema fondamentale del calcolo [par 8.2 fino a par 8.2.1].

Integrabilità delle funzioni continue [Par 8.14].

Integrazione per parti e cambio di variabile nelle integrazioni [par 8.2.1, par 8.2.2].

Formula di Taylor con resto integrale [par 8.2.3].

Integrazione impropria (integrali generalizzati) [par 8.3.1, 8.3.2]

Criterio di convergenza assoluta per integrali impropri.

Esempi di funzioni integrabili in senso improprio ma non assolutamente convergenti.

La topologia euclidea di $\mathbb{R}$

Aperti e chiusi di $\mathbb{R}$ (della topologia standard o euclidea) [par 6.3.1].

Caratterizzazione dei chiusi per successioni [Proposizione 6.24*]. Chiusura e derivato [Proposizione 6.28*].

Insiemi compatti per successioni.

Teoremi di Weierstrass [Teorema 6.41] e Heine-Cantor [Teorema 6.47] su compatti [par 6.4.4 e 6.4.5].

Massimo e minimo limite di successioni [[file](#)]

Un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato [Teorema 6.32].

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni A aperto [Proposizione 6.35].

Una funzione continua su $[c, +\infty)$ con asintoto in $+\infty$ è uniformemente continua su $[c, +\infty)$ [[file](#)]

- **Testi consigliati**

[C] Chierchia, L.: [Corso di analisi, prima parte. Una introduzione rigorosa all'analisi matematica su \$\mathbb{R}\$](#) McGraw-Hill, 2019, 390 pagine

[R] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw Hill, 1976

[O] John M.H. Olmsted [The Real Number System](#), 1962, 216 pages