Diamo qui le definizioni delle principali funzioni analitiche elementari (le dimostrazioni verranno date in seguito).

Esponenziali e logaritmi

Definizione 1.1 *Se $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora*[1]

$$a^x := \begin{cases} \sup\limits_{\{r\in\mathbb{Q}: r<x\}} a^r\,, & \text{se } a > 1\,, \\[2ex] \inf\limits_{\{r\in\mathbb{Q}: r<x\}} a^r\,, & \text{se } a < 1\,. \end{cases}$$

Teorema 1.2 (Funzioni esponenziali) *Sia $1 \neq a > 0$. La funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ è una funzione continua, su $\mathbb{R}$ con immagine $(0,+\infty)$, strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $a < 1$; inoltre $x \to a^x$ soddisfa le seguenti proprietà:*
(i) $a^{x+y} = a^x a^y$, *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$;
(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$, *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$;
(iii) *se* $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x/x^n = +\infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$; *se* $a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x x^n = 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Se $a \neq 1$ le funzioni esponenziali $y \in \mathbb{R} \to a^y \in (0,+\infty)$ sono strettamente monotòne e quindi invertibili:

Definizione 1.3 *Se $1 \neq a > 0$, la funzione inversa di $y \to x = a^y$ si chiama logaritmo in base a di x e si denota $x \in (0,+\infty) \mapsto \log_a x \in \mathbb{R}$; $\log x := \log_e x$ prende il nome di logaritmo naturale (o, semplicemente, logaritmo) di x.*

Da tale definizione segue immediatamente che

$$\textit{dato } x > 0\,,\ y = \log_a x \textit{ è l'unico numero reale tale che } a^y = x\,. \tag{1}$$

Teorema 1.4 (Funzioni logaritmiche) *Sia $1 \neq a > 0$. La funzione $x \in (0,+\infty) \mapsto \log_a x$ è una funzione continua, su $(0,+\infty)$ con immagine $\mathbb{R}$, strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $a < 1$; inoltre $x \to \log_a x$ soddisfa le seguenti proprietà:*
(i) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, *per ogni* $x, y \in (0,+\infty)$;
(ii) $\log_a x^y = y \log_a x$, *per ogni* $x, y \in (0,+\infty)$;
(iii) *se* $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x/x^\alpha = 0$ *per ogni* $\alpha > 0$;
(iv) *se a e b sono numeri positivi diversi da 1, per ogni $x > 0$ si ha:* $\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$;
(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$, *dove* $\log x := \log_e x$.

Definizione 1.5 (iperboliche) *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si definiscono, rispettivamente seno iperbolico e coseno iperbolico di x le funzioni*

$$\operatorname{senh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2}$$

Per le proprietà delle funzioni iperboliche (e le funzioni ad esse collegate) si vedano gli enunciati nel paragrafo 3.4 di [C].

---

[1] Naturalmente, $a^1 := a$.

Funzioni trigonometriche

Teorema 1.6 (Seno e coseno) *Esistono (e sono uniche) due funzioni continue su* $\mathbb{R}$*, una pari,* $\cos x$ *(il coseno di* x*), una dispari,* $\operatorname{sen} x$ *(il seno di* x*)*[2]*, ed un numero irrazionale* $\beta \in (1,2)$ *che verificano le seguenti proprietà:*
(i) $\cos 0 = 1$*,* $\operatorname{sen} 0 = 0$*;*
(ii) $\cos \beta = 0$ *e* $\cos x > 0$ *per ogni* $x \in [0, \beta)$*;*
(iii) *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$*, si ha* $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$*;*
(iv) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Il numero famoso π ("pi greco") è per definizione dato da 2β.

Da questo teorema seguono tutte le proprietà "note" del seno e coseno (vedi gli enunciati al § 5.2.3 da Proposizione 5.17 in poi e § 5.3 per le funzioni trigonometriche inverse).

[2]Ossia, $\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.