Criterio di Leibniz

Sia $\{a_n\}$ *una successione decrescente con* $\lim a_n = 0$. *Allora,* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *converge (ad un numero non negativo).*

Dimostrazione Si considerino le somme parziali pari e dispari date da:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

e si noti che (poiché $\{a_n\}$ è decrescente) i numeri tra parentesi sono non negativi. Quindi: $S_{2n} \geq 0$; $\{S_{2n}\}$ è crescente; $\{S_{2n+1}\}$ è decrescente. Inoltre $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ e dunque $S_{2n} \leq S_{2n+1}$. In particolare $0 \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq a_1$. Dunque (per il teorema sui limiti delle funzioni monotone)

$$0 \leq \lim S_{2n} = \sup S_{2n} \leq \inf S_{2n+1} = \lim S_{2n+1} \leq a_1,$$

e poiché $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ e $\lim a_{2n+1} = 0$, si ha che $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1}$ e da questo segue la tesi. ∎

Come già osservato, una serie può convergere pur essendo non assolutamente convergente come mostrano gli esempi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ oppure $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log\log n}$.