Capitolo 4

Integrale (secondo Riemann)

4.1 Insiemi elementari e funzioni a scalini

Insiemi elementari

Definizione 4.1 *Un insieme elementare $E \subseteq \mathbb{R}$ è una unione finita di intervalli limitati. La famiglia degli insiemi elementari si denota $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathbb{R})$; più in generale, $\mathcal{E}(E)$ con E intervallo di $\mathbb{R}$ denota la famiglia degli insiemi elementari contenuti in E.*

Lemma 4.2 *Sia $E = \bigcup_{1 \le k \le m} J_k$ con J_k intervalli. Allora esistono $n \le m$ intervalli I_k a due a due disgiunti tali che $E = \bigcup_{1 \le k \le n} I_k$.*

Dimostrazione Per induzione su $m \in \mathbb{N}$. Per $m = 1$ la tesi è vera con $n = m = 1$ e $I_1 = J_1$. Assumiamo la tesi vera per $m \in \mathbb{N}$ e dimostriamola per $m + 1$. Se $J_{m+1} \cap J_k = \emptyset$ per ogni $1 \le k \le m$ la tesi segue direttamente dall'ipotesi induttiva (con $n \le m + 1$). Se esiste $j \le m$ tale che $J_{m+1} \cap J_j \neq \emptyset$, allora $\tilde{J}_j := J_j \cup J_{m+1}$ è un intervallo e la tesi segue dall'ipotesi induttiva applicata agli m intervalli J_k con k tale che $j \neq k \le m$ e $\tilde{J}_j$ (in questo caso, $n \le m$). ∎

Osservazione 4.3 Dal questo lemma segue che *un insieme elementare può sempre essere descritto come unione finita e disgiunta di intervalli limitati*.

Notazione Se $E = \cup A_j$ con A_j disgiunti ($A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$) scriveremo $E = \dot{\cup} A_j$.

Proposizione 4.4 *Se $A, B \in \mathcal{E}(I)$, allora $A \cap B$, $A \cup B$, e $A \backslash B$ appartengono a $\mathcal{E}(I)$.*

Dimostrazione Siano $A = \cup I_j$ e $B = \cup J_k$ con I_j e J_k intervalli limitati in[1] I. Allora, $A \cup B = \bigcup_{j,k} I_j \cup J_k$ e quindi $A \cup B \in \mathcal{E}(I)$ per definizione di insieme elementare. Inoltre, essendo l'intersezione di intervalli un intervallo, si ha

$$A \cap B = \bigcup_{j,k} I_j \cap J_k \in \mathcal{E}(I)\,. \tag{4.1}$$

[1] Gli indici j e k variano su insiemi finiti.

Infine,

$$A\backslash B = (\cup_j I_j) \cap (\cup_k J_k)^c = (\cup_j I_j) \cap (\cap_k J_k^c) = \cup_j \big(I_j(\cap_k J_k^c)\big)\,. \tag{4.2}$$

Ora, per ogni intervallo I, I^c è un intervallo o unione di due intervalli disgiunti[2] e quindi, per ogni j, $I_j(\cap_k J_k^c)$ è unione finita di intervalli $I_{ji} \subseteq I_j$, e quindi

$$A\backslash B = \bigcup_{j,i} I_{ji} \in \mathcal{E}(I)\,, \qquad I_{ji} \subseteq I_j\backslash B\,. \quad \blacksquare \tag{4.3}$$

Funzioni a scalini

Definizione 4.5 *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice a scalini se è una combinazione lineare (finita) di funzioni caratteristiche[3] di intervalli limitati, ossia,*

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,\ \alpha_j \in \mathbb{R}\,,\ I_j \ \textit{intervallo limitato}\,. \tag{4.4}$$

L'insieme di tali funzioni si denota $S := S(\mathbb{R})$ e, più in generale, $S(I)$ denota le funzioni a scalini come in (4.4) con $I_j \subseteq I$ per un dato un intervallo I.

Proposizione 4.6 $f \in S \iff \# f(\mathbb{R}) < \infty$ *e per ogni* $\alpha \in f(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $f^{-1}(\alpha) \in \mathcal{E}$.

Dimostrazione Se $f \in S$ è come in (4.4), allora[4] $f(\mathbb{R}) = \{0, \alpha_1, ..., \alpha_n\}$ e se $\alpha \in f(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $f^{-1}(\alpha) = \cup\{I_j \big| \alpha_j = \alpha\}$ che è un insieme elementare.
Assumiamo, ora, che[5] $f \not\equiv 0$ sia tale che $\# f(\mathbb{R}) < \infty$ e per ogni $c \in f(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $f^{-1}(c) \in \mathcal{E}$. Si noti che da tali ipotesi segue che l'insieme $\{x \big| f(x) \neq 0\}$ è limitato (essendo unione finita di insiemi elementari), dunque necessariamente $0 \in f(\mathbb{R})$. Sia, dunque, $f(\mathbb{R}) = \{0, c_1, ..., c_m\}$ (con i valori c_k diversi tra loro e diversi da 0). Per ipotesi, per ogni $1 \le k \le m$, $f^{-1}(c_k) = E_k \in \mathcal{E}$ e, per il Lemma 4.2, esistono m_k intervalli disgiunti e limitati I_{ki} tali che $E_k = \dot\cup_i I_{ki}$. Quindi, $\chi_{E_k} = \sum_i \chi_{I_{ki}}$ e

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{i=1}^{m_k} \chi_{I_{ki}} =: \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}\,, \tag{4.5}$$

dove $n = \sum_k m_k$, $\{I_j \big| 1 \le j \le n\} = \{I_{ki} \big| 1 \le k \le m\,, 1 \le i \le m_k\}$ e[6] $\{\alpha_j \big| 1 \le j \le n\} = \{c_k \big| 1 \le k \le m\}$. $\blacksquare$

Osservazione 4.7 Si noti che la rappresentazione ottenuta in (4.5) di una funzione f a scalini non identicamente nulla è della stessa forma di (4.4) ma con gli intervalli a due a due disgiunti.

[2] Cfr. Esercizio 2.4.

[3] Si ricorda che la funzione caratteristica (o indicatrice) di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto \chi_A(x)$ definita come $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$; in particolare $\chi_\emptyset$ è la funzione identicamente nulla.

[4] Si noti che gli intervalli I_j sono limitati e quindi $f = 0$ nel complementare di $\cup I_j$.

[5] $f \not\equiv 0$ significa che f non è identicamente nulla. Ovviamente, se $f \equiv 0$, vale (4.4), essendo $f = \chi_\emptyset$.

[6] Si noti che alcuni degli α_j possono essere uguali tra loro e che gli intervalli I_j (ossia gli I_{ki}) sono a due a due disgiunti.

Lemma 4.8 *Se $f, g \in S(I)$, esistono intervalli disgiunti e limitati $I_j \subseteq I$, $1 \leq j \leq n$, e numeri reali α_j e β_j tali che*

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}\,, \qquad g = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{I_j}\,. \tag{4.6}$$

Il punto di questo semplice lemma è che nella (4.6) *gli intervalli relativi a f e g sono gli stessi* (e sono a due a due disgiunti).

Dimostrazione Innanzitutto osserviamo che la tesi equivale a trovare una famiglia finita $\mathcal{F}$ di intervalli limitati e a due a due disgiunti tale che sia f che g assumono un valore costante su ogni intervallo di $\mathcal{F}$ e sono nulle sul complementare dell'unione degli intervalli in $\mathcal{F}$.
Se una delle due funzioni, ad esempio g, è identicamente nulla, la tesi segue dall'Osservazione 4.7, ponendo $\beta_j = 0$ per ogni j.
Assumiamo, ora, che sia f che g non siano identicamente nulle.
Siano: $\{c_1, \ldots, c_p\}$ i valori non nulli (e distinti) di f e $\{d_1, \ldots, d_q\}$ quelli di g; $E_i := f^{-1}(c_i)$; $F_k := g^{-1}(d_k)$; $A_i := E_i \backslash F$; $B_k := F_k \backslash E$; $A_{ik} := E_i \cap F_k$. Allora,

$$E \cup F = \big(\cup_i \,(A_i \backslash F)\big) \,\dot\cup\, \big(\cup_k \,(B_k \backslash E)\big) \,\dot\cup\, \big(\cup_{i,k} \,A_{ik}\big)\,;$$

naturalmente, in questa formula possiamo considerare solo gli indici tali che $A_i \backslash F$, $B_k \backslash E$ e A_{ik} siano non vuoti.
Ora, su A_i, se non vuoto, f vale c_i e g vale 0; su B_k, se non vuoto, f vale 0 e g vale d_k; su A_{ik}, se non vuoto, f vale c_i e g vale d_k; fuori da $E \cup F$ sia f che g valgono 0. Per la Proposizione 4.4, gli insiemi A_i, B_k e A_{ik} sono insiemi elementari e sono tutti a due a due disgiunti. La tesi segue denotando con $\{I_j\}$ la famiglia di intervalli disgiunti e non vuoti ottenuta elencando gli intervalli (non vuoti) di cui sono unione disgiunta (per l'Osservazione 4.3) i vari insiemi A_i, B_k e A_{ik}. ∎

Dalla rappresentazione (4.6) di due funzioni a scalini segue immediatamente la seguente

Proposizione 4.9 *Se $f, g \in S(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora appartengono a $S(I)$ anche le funzioni $af + bg$, fg, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f^{\pm}$ e $|f|$.*

Dimostrazione Siano f, g come in (4.6), allora

$$af + bg = \sum_{j=1}^{n} (a\alpha_j + b\beta_j)\chi_{I_j}\,, \;\; fg = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j\beta_j)\chi_{I_j}\,, \;\; \max\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n} \max\{\alpha_j,\beta_j\}\chi_{I_j}\,,$$

$$\min\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n} \min\{\alpha_j,\beta_j\}\chi_{I_j}\,, \;\; f^{\pm} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{\pm}\chi_{I_j}\,, \;\; |f| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\chi_{I_j}\,. \qquad ∎$$