Misura di insiemi elementari e integrale di funzioni a scalini

Cominciamo col definire la lunghezza di un intervallo.

Definizione 4.10 *Se è I un intervallo, la sua* **lunghezza** *(o misura), $|I|$, è definita come segue: $|\emptyset| = 0$; se I non è limitato $|I| = +\infty$; se $I \neq \emptyset$ e limitato, $|I| = \sup I - \inf I$.*

A volte si usano i simboli $\ell(I)$ o $\mathrm{mis}_1(I)$ al posto di $|I|$.

Osservazione 4.11 (i) La lunghezza di un punto (o meglio, di un singleton $I = \{a\} = [a, a]$) è zero.

(ii) La definizione di lunghezza non dipende dal fatto che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.

Lemma 4.12 *Sia I un intervallo limitato, $n \geq 2$ e $I_1, \dots, I_n$ intervalli tali che $I = \dot\cup I_k$. Allora*

$$|I| = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \,.$$

Dimostrazione Possiamo assumere che $I_k \neq \emptyset$ per ogni k e poiché gli intervalli I_k sono disgiunti, possiamo anche assumere che[7] $I_1 \leq \cdots \leq I_n$. Siano $a_k = \inf I_k \leq b_k = \sup I_k$ per ogni $1 \leq k \leq n$, $a = \inf I = a_1$ e $b = \sup I = b_n$. Poniamo anche $a_{n+1} := b_n = b$. Poiché $I = \dot\cup I_k$ (e I è un intervallo), si deve avere $b_k = a_{k+1}$ per ogni $1 \leq k \leq n$ e quindi

$$|I| = b - a = a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \,. \qquad \blacksquare$$

Lemma 4.13 *Siano I_j e J_k intervalli limitati con $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$ tali che $E = \dot\cup I_j = \dot\cup J_k$. Allora $\sum |I_j| = \sum |J_k|$.*

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che $I_j = \dot\cup_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot\cup_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 4.12 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$. Quindi,

$$\sum_j |I_j| = \sum_j \sum_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j |I_j \cap J_k| = \sum_k |J_k| \,. \qquad \blacksquare$$

Questo lemma permette di dare la definizione di misura di un insieme elementare.

Definizione 4.14 *Sia $E \in \mathcal{E}$. Allora $|E| := \mathrm{mis}_1(E) := \sum |I_k|$ dove $E = \dot\cup I_k$ ($1 \leq k \leq n$, I_k intervallo limitato).*

Si noti che il numero $|E|$ per il Lemma 4.13 dipende solo dall'insieme elementare E e *non* dal particolare modo in cui viene rappresentato come unione disgiunta di intervalli.

[7] Cfr. Esercizio 2.4.

Lemma 4.15 *Sia $f \in S$, e*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j} = f = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \chi_{J_k} \tag{4.7}$$

con $\{I_j\}$ intervalli limitati disgiunti, $\{J_k\}$ intervalli limitati disgiunti. Allora,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j| = \sum_{k=1}^{m} \beta_k |J_k| \,. \tag{4.8}$$

Dimostrazione Possiamo assumere che tutti gli intervalli siano non vuoti e che $\alpha_j \neq 0 \neq \beta_k$ per ogni j e k (dato che questo non altera né la rappresntazione (4.7), né le somme in (4.8)). In tal caso

$$E := \dot\cup_j I_j = \dot\cup_k J_k = \{x \in \mathbb{R} \big| f(x) \neq 0\} \,.$$

Ora[8], $I_j = \dot\cup_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot\cup_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 4.12 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$; inoltre, se $I_j \cap J_k \neq \emptyset$ si deve avere $\alpha_j = \beta_k$ (essendo il valore di f su $I_j \cap J_k$), mentre se $I_j \cap J_k = \emptyset$, allora $|I_j \cap J_k| = 0$. Quindi,

$$\sum_j \alpha_j |I_j| = \sum_j \sum_k \alpha_j |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j \alpha_j |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j \beta_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \beta_k |J_k| \,. \quad \blacksquare$$

Possiamo ora dare la definizione di integrale (di Riemann) delle funzioni a scalini. Sebbene non necessario, è più semplice (e intuitivo) definire l'integrale di una funzione a scalini f espressa come in (4.4) con gli intervalli I_j a due a due disgiunti (cosa sempre possibile in vista dell'Osservazione 4.7). Alla fine della sezione vedremo che la stessa definizione può essere estesa a qualunque funzione a scalini $f = \sum \alpha_j \chi_{I_j}$ (senza richiedere che gli intervalli limitati I_j siano disgiunti[9]).

Definizione 4.16 *Sia I un intervallo limitato e $f \in S(I)$. Si chiama* **integrale di f su I** *il numero reale*

$$\int_I f := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j| \,, \tag{4.9}$$

dove $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}$ con I_j intervalli limitati a due a due disgiunti.

Si noti che, grazie al Lemma 4.15, tale definizione è ben posta (ossia dipende solo dalla funzione f e non dalla sua rappresentazione come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli limitati a due a due disgiunti).

Dalla Proposizione 4.9 (e dalla sua dimostrazione) segue immediatamente la seguente

Proposizione 4.17 *L'integrale è un 'funzionale lineare e positivo su $S(I)$', ossia:*

$$\int_I (af + bg) = a \int_I f + b \int_I g \,, \qquad \forall\, f, g \in S(I) \tag{4.10}$$

$$\int_I f \geq 0 \,, \qquad \forall\, f \in S(I) \,,\ f \geq 0 \,. \tag{4.11}$$

[8] Cfr. dimostrazione del Lemma 4.13.

[9] Cfr. Osservazione 4.14–(ii).

Osservazione 4.18 (i) Da (4.10) e (4.11) segue subito che, se $f, g \in S(I)$, allora

$$f \le g \implies \int_I f \le \int_I g\,, \qquad \big(f, g \in S(I)\big)\,. \tag{4.12}$$

A sua volta da (4.12), dal fatto che $-|f| \le f \le |f|$ e da (4.10) segue la fondamentale disuguaglianza

$$-\int_I |f| \le \int_I f \le \int_I |f| \qquad \iff \qquad \Big|\int_I f\Big| \le \int_I |f|\,. \tag{4.13}$$

(ii) Da (4.10) segue che se $\alpha_j \in \mathbb{R}$ e $I_j \subseteq E$ sono intervalli *non necessariamente disgiunti*, $(1 \le j \le n)$, allora

$$\int_E \Big(\sum_j \alpha_j \chi_{I_j}\Big) = \sum_j \alpha_j |I_j|\,. \tag{4.14}$$

Esercizi

Definizione 4.19 *Due intervalli I e J si dicono adiacenti se $I \cap J = \emptyset$ e $I \cup J$ è un intervallo*[10].

Esercizio 4.1 Siano $I \le J$ due intervalli ordinati. Dimostrare che esiste un unico intervallo (eventualmente vuoto) I' "tra I e J", ossia un unico intervallo I' disgiunto da I e J, tale che $I \le I' \le J$ e $I \dot\cup I' \dot\cup J$ è un intervallo.

Esercizio 4.2 Sia $E \in \mathcal{E}$. Dimostrare che esistono e sono unici intervalli ordinati I_i $(1 \le i \le n)$, non adiacenti tali che $\dot\cup I_i = E$.

Esercizio 4.3 Siano $f = -2\chi_{[-3,-2)} + 5\chi_{(1,\sqrt{2}]}$, $g = \sum_{i=1}^{5} (-1)^i \chi_{(-4+i,-3+i)}$. Si determinino n, I_j, α_j e β_j tali che valga (4.6).

[10] Ad esempio, $(0,1)$ e $[1,+\infty)$ sono adiacenti e $(0,1)$ e $(1,+\infty)$ non lo sono (ma sono contigui).