4.2 Funzioni Riemann integrabili e loro integrale

Passiamo ora alla definizione di integrabilità secondo Riemann per funzioni limitate su un intervallo limitato. In questa sezione, *I denota un intervallo limitato.*

Definizione 4.20 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Denotiamo*

$$S_f^-(I) := \{g \in S(I) \big| \, g \le f\}, \qquad S_f^+(I) := \{h \in S(I) \big| \, h \ge f\}. \tag{4.15}$$

Definiamo integrale inferiore di Riemann e integrale superiore di Riemann di f su I i numeri

$$\mathcal{I}_I^-(f) := \sup_{g \in S_f^-(I)} \int_I g, \qquad \mathcal{I}_I^+(f) := \inf_{h \in S_f^+(I)} \int_I h. \tag{4.16}$$

La funzione f si dice Riemann integrabile se $\mathcal{I}_I^-(f) = \mathcal{I}_I^+(f)$ ed, in tal caso, si definisce l'integrale di Riemann di f il numero reale

$$\int_I f := \mathcal{I}_I^-(f) = \mathcal{I}_I^+(f). \tag{4.17}$$

La classe di funzioni Riemann integrabile su I si denota con $\mathcal{R}(I)$.

Osservazione 4.21 (i) Si noti che per una funzione limitata f, gli insiemi $S_f^+(I)$ e $S_f^-(I)$ sono sottoinsiemi non vuoti di $S(I)$. Inoltre, se $g \in S_f^-(I)$ e $h \in S_f^+(I)$, allora $g \le f \le h$ e dunque, da (4.12), segue che $\int_I g \le \int_I h$ e

$$\Big\{\int_I g \Big| \, g \in S_f^-(I)\Big\} \le \Big\{\int_I h \Big| \, h \in S_f^+(I)\Big\}. \tag{4.18}$$

Nel caso $f \in \mathcal{R}(I)$ tali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono contigui e l'integrale di Riemann ne è l'elemento separatore. In altri termini, si ha il seguente *criterio di integrabilità*

$$f \in \mathcal{R}(I) \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, g, h \in S(I) : \begin{cases} g \le f \le h, \\ \displaystyle\int_I (h - g) < \varepsilon. \end{cases} \tag{4.19}$$

(ii) $S(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$: se $f \in S(I)$ possiamo prendere in (4.19) $g = f = h$.

(iii) Se $m \le f \le M$ ($m, M \in \mathbb{R}$) possiamo assumere che le funzioni a scalini in (4.19) siano tali che $m \le g$ e $h \le M$. Infatti, le funzioni $\max\{g, m\}$ e $\min\{h, M\}$ sono a scalini (Proposizione 4.9) e $g \le \max\{g, m\} \le f \le \min\{h, M\} \le h$ e

$$\int_I (\min\{h, M\} - \max\{g, m\}) \le \int_I (h - g).$$

Da (4.19) segue subito la seguente caratterizzazione di integrabilità:

Proposizione 4.22 (Criterio di integrabilità per successioni)
$f \in \mathscr{R}(I)$ se e solo per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono, $g_n \in S_f^-(I)$ e $h_n \in S_f^+(I)$ tali che $\int_I (h_n - g_n) \to 0$ ed in tal caso $\int_I f = \lim \int_I h_n = \lim \int_I g_n$.

Dimostrazione Sia $f \in \mathscr{R}(I)$. Se $\varepsilon = 1/n$, da (4.19) segue che esistono $g_n \in S_f^-(I)$ e $h_n \in S_f^+(I)$ tali che $0 \le \int_I (h_n - g_n) < 1/n$, e dalla definizione di sup e inf e da (4.17) segue che $\int_I f = \lim \int_I h_n = \lim \int_I g_n$.
Viceversa, dato $\varepsilon > 0$ sia N tale che $\int_I (h_n - g_n) < \varepsilon$ per ogni $n \ge N$ con $g_n \le f \le h_n$ e $g_n, h_n \in S(I)$. Allora vale vale la (4.19) con $g = g_N$ e $h = h_N$. ∎

Osservazione 4.23 *Le successioni di funzioni $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$ possono essere prese rispettivamente crescenti (ossia $g_n(x) \le g_{n+1}(x)$ per ogni $x \in I$) e decrescenti (ossia $h_n(x) \ge h_{n+1}(x)$ per ogni $x \in I$).*
Dimostrazione Se $\tilde{g}_n \in S_f^-$ e $\tilde{h}_n \in S_n^+$ sono tali che $\lim \int_I (\tilde{h}_n - \tilde{g}_n) = 0$, ricordando che il massimo/minimo tra funzioni a scalini è a scalini, possiamo prendere $g_n = \max\{\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n\}$ e $h_n = \min\{\tilde{h}_1, ..., \tilde{h}_n\}$; infatti $\{g_n(x)\}$ è crescente e $\{h_n(x)\}$ decrescente e quindi $h_n - g_n \le \tilde{h}_n - \tilde{g}_n$ e integrando tale relazione su I si ottiene che $0 \le \int_I (h_n - g_n) \le \int_I (\tilde{h}_n - \tilde{g}_n) \to 0$. ∎

4.2.1 Proprietà dell'integrale di Riemann

Nel prossimo teorema raccogliamo le proprietà fondamentali dell'integrale secondo Riemann.

Teorema 4.24 (Proprietà dell'integrale di Riemann) *Sia I un intervallo limitato.*
(a) *Se $f_1, f_2, f \in \mathscr{R}(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora appartengono a $\mathscr{R}(I)$ anche le funzioni $af_1 + bf_2$, $f_1 f_2$, $\max\{f_1, f_2\}$, $\min\{f_1, f_2\}$, $f^\pm$ e $|f|$.*
(b) *L'integrale di Riemann è un funzionale lineare e positivo su $\mathscr{R}(I)$, ossia:*

$$\int_I (af_1 + bf_2) = a \int_I f_1 + b \int_I f_2 \,, \qquad \forall\, f_1, f_2 \in \mathscr{R}(I) \,, \tag{4.20}$$

$$\int_I f \ge 0 \,, \qquad \forall\, f \in \mathscr{R}(I) \,, f \ge 0 \,, \tag{4.21}$$

$$\left| \int_I f \right| \le \int_I |f| \,, \qquad \forall\, f \in \mathscr{R}(I) \,. \tag{4.22}$$

(c) *L'integrale di Riemann è additivo: se $f \in \mathscr{R}(I)$, per ogni intervallo $J \subseteq I$, $f|_J \in \mathscr{R}(J)$ e*[11]

$$\int_J f := \int_J f|_J = \int_I f \chi_J \tag{4.23}$$

e se $I = I_1 \dot{\cup} I_2$ con I_i intervalli allora

$$\int_{I_1} f + \int_{I_2} f = \int_I f \,. \tag{4.24}$$

[11] Si ricordi la definizione di restrizione nella nota 39 a pag. 79.

(d) *$f \in \mathcal{R}(I)$ se e solo se $f : I \to \mathbb{R}$ è limitata e $f \in \mathcal{R}([a,b])$ per ogni intervallo $[a,b] \subseteq I$.*

Dimostrazione Nel corso della dimostrazione useremo sistematicamente la Proposizione 4.9. Dividiamo la dimostrazione di **(a)** in vari passi.
(i) Siano $g_i, h_i \in S(I)$ come nella relazione analoga a (4.19) con f_i al posto di f e $\varepsilon/2$ al posto di ε. Allora vale (4.19) con $g := g_1 + g_2, h := h_1 + h_2 \in S$ e $f := f_1 + f_2$ e quindi $f \in \mathcal{R}(I)$.
(ii) Sia $a > 0$. Se $f \in \mathcal{R}(I)$ e vale la (4.19) con ε/a al posto di ε, allora vale la (4.19) con ag, af e ah al posto di g, f e h. Dunque $af \in \mathcal{R}(I)$ per ogni $f \in \mathcal{R}(I)$ e $a > 0$.
(iii) Se vale la (4.19) allora si ha $-h \le -f \le -g$ e $\int_I(-g-(-h)) = \int_I(h-g) < \varepsilon$ ossia $-f \in \mathcal{R}(I)$. Da questa osservazione e da (i) e (ii) segue che $af_1 + bf_2 \in \mathcal{R}(I)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathcal{R}(I)$.
(iv) Dimostriamo che $f^\pm, |f| \in \mathcal{R}(I)$. Si ricordi che la funzione $x \to x^+$ è crescente e che $x \to x^-$ è decrescente. Dunque se vale (4.19), allora $g^+ \le f^+ \le h^+$ e $h^+ - g^+ \le (h^+ - g^+) + (g^- - h^-) = h - g$ e quindi $\int_I(h^+ - g^+) < \varepsilon$, da cui $f^+ \in \mathcal{R}(I)$. Poiché $f^- = (-f)^+$ da (iii) segue che $f^- \in \mathcal{R}(I)$ e che $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{R}(I)$.
(v) Dal punto precedente, segue che $\max\{f_1, f_2\} = (f_1 - f_2)^+ + f_2 \in \mathcal{R}(I)$. Quindi anche $\min\{f_1, f_2\} = -\max\{-f_1, -f_2\} \in \mathcal{R}(I)$.
(vi) Dimostriamo ora che se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $f \ge 0$, allora $f^2 \in \mathcal{R}(I)$. Sia $M = \sup f$ e assumiamo (4.19) con $\varepsilon/(2M)$ al posto di ε. Per l'Osservazione 4.21–(iv), possiamo assumere che $g \ge 0$ e $h \le M$. Allora, $g^2 \le f^2 \le h^2$ e $\int_I(h^2 - g^2) = \int_I(h-g)(h+g) \le 2M\int_I(h-g) < \varepsilon$ e dunque $f^2 \in \mathcal{R}(I)$.
Da questo segue anche che se $f, g \in \mathcal{R}(I)$ e $f, g \ge 0$ allora $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2) \in \mathcal{R}(I)$.
Quindi, per qualunque $f \in \mathcal{R}(I)$, $f^2 = (f^+ - f^-)^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2 - 2f^+f^- \in \mathcal{R}(I)$.
Infine, se $f, g \in \mathcal{R}$, $fg = f^+f^- + g^+g^- - f^+g^- - f^-g^+ \in \mathcal{R}(I)$. Questo conclude la dimostrazione di **(a)**.

(b): La (4.20) segue immediatamente da **(a)**, da (4.10) e dal fatto che $\int_I f_i = \lim \int_I g_n^{(i)}$ con $g_n^{(i)}$ a scalini.
La (4.21) segue da (4.11) e dal fatto che $\int_I f = \lim \int_I g_n$ con $0 \le g_n \le f$ a scalini (si ricordi l'Osservazione 4.21–(iii)).
Infine da **(a)** e da (4.20), segue che

$$\Big|\int_I f\Big| = \Big|\int_I (f^+ - f^-)\Big| = \Big|\int_I f^+ - \int_I f^-\Big| \le \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I |f|\,,$$

il che dimostra (4.22). Questo conclude la dimostrazione di **(b)**.

(c): Siano g_n e h_n come nella Proposizione 4.22. Allora[12], $g_n\chi_J, h_n\chi_J \in S(J)$ e le disuguaglianze $g_n\chi_J \le f \le h_n\chi_J$ e $g_n\chi_J \le f\chi_J \le h_n\chi_J$ valgono sia su I che su J. Dalla Proposizione 4.22 e dal fatto che $\int_J(h_n\chi_J - g_n\chi_J) = \int_I(h_n\chi_J - g_n\chi_J) \le \int_I(h_n - g_n) \to 0$, segue che $f \in \mathcal{R}(J)$ e cha vale la (4.23).
La (4.24) segue immediatamente dalla (4.23) osservando che $\chi_I = \chi_{I_1} + \chi_{I_2}$.

(d): Se $f \in \mathcal{R}(I)$, allora, per **(c)**, $f \in \mathcal{R}([a,b])$ per ogni $[a,b] \subseteq I$. Assumiamo ora che $f \in \mathcal{R}([a,b])$ per ogni $[a,b] \subseteq I$. Poiché f è limitata su I, esistono due numeri $m < M$

[12]Si ricordi che $\chi_A\chi_B = \chi_{A\cap B}$ e si usi la Proposizione 4.22.

tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in I$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $[a, b] \subseteq I$ tale che $a - \alpha$ e $\beta - b$ siano minori di $\frac{\varepsilon}{3(M-m)}$, dove $\alpha = \inf I$ e $\beta = \sup I$. Chiaramente, $I = I_1 \dot{\cup} [a, b] \dot{\cup} I_2$ con I_1 intervallo di estremi α e a e I_2 intervallo di estremi b e β. Poiché f è integrabile su $[a, b]$ esistono $g, h \in S([a, b])$, tali che $g \leq f \leq h$ su $[a, b]$ e $\int_{[a,b]}(h - g) < \varepsilon/3$. Allora, le funzioni a scalini su I definite come $\tilde{g} = m\chi_{I_1} + g + m\chi_{I_2}$ e $\tilde{h} = M\chi_{I_1} + h + M\chi_{I_2}$, soddisfano $\tilde{g} \leq f \leq \tilde{h}$ su I e $\int_I(\tilde{h} - \tilde{g}) < \varepsilon$. ∎