### 4.2.2 Partizioni e funzioni Riemann integrabili

Introduciamo la nozione di partizione di un intervallo e diamo un nuovo criterio di integrabiltà.

**Definizione 4.25** *Una partizione di un intervallo $I$ è una famiglia $P = \{I_j \big| 1 \le j \le n\}$ finita di intervalli disgiunti $I_j$ tali che $I = \dot\cup I_j$. L'insieme di tutte le partizioni di $I$ verrà denotato $\mathcal{P}(I)$. Diremo che la partizione $P = \{I_j\}$ è ordinata se $I_1 \le \cdots \le I_n$; in tal caso (essendo $I = \dot\cup I_j$), se $n > 1$, $\sup I_j = \inf I_{j+1}$, per ogni $1 \le j \le n-1$.*

Le funzioni a scalini possono sempre essere rappresentate in termini di partizioni:

**Lemma 4.26** *Se $g, h \in S(I)$, esiste una partizione $P = \{I_j \big| 1 \le j \le n\} \in \mathcal{P}(I)$ e numeri reali $\alpha_j$ e $\beta_j$ tali che $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}$ e $h = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{I_j}$.*

**Dimostrazione** Per il Lemma 4.7 possiamo assumere che[15]

$$g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{2j} \chi_{I_{2j}} \,, \qquad h = \sum_{j=1}^{m} \beta_{2j} \chi_{I_{2j}}$$

con $I_{2j} \subseteq I$ ordinati, non vuoti e disgiunti. Definiamo ora intervalli (eventualmente vuoti) $I_{2j-1}$ per $1 \le j \le m+1$ tali che $\{I_i \big| 1 \le i \le n := 2m+1\}$ sia una partizione di[16] $I$. L'asserto segue ponendo $\alpha_{2j-1} = 0 = \beta_{2j-1}$ se $I_{2j-1} \ne \emptyset$. ∎

Data una partizione $P = \{I_1, ..., I_n\} \in \mathcal{P}(I)$ e una funzione limitata $f : I \to \mathbb{R}$, definiamo le due seguenti funzioni a scalini:

$$\underline{f}_P := \sum_{j=1}^{n} (\inf_{I_j} f) \chi_{I_j} \,, \qquad \bar{f}_P = \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f) \chi_{I_j} \,, \qquad \big(P = \{I_1, ... I_n\} \in \mathcal{P}(I)\big) \,. \tag{4.26}$$

Chiaramente, se $P \in \mathcal{P}(I)$ e $g, h \in S(I)$ sono come nel Lemma 4.26, allora[17]

$$g \le f \le h \qquad \Longrightarrow \qquad g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j} \le \underline{f}_P \le f \le \bar{f}_P \le \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{I_j} = h \,. \tag{4.27}$$

Da tale relazione e dal criterio di integrabilità (4.19), segue immediatamente:

**Proposizione 4.27 (Criterio di integrabilità per partizioni)**
*$f \in \mathcal{R}(I)$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $P = \{I_j \big| 1 \le j \le n\} \in \mathcal{P}(I)$ tale che*

$$\int_I (\bar{f}_P - \underline{f}_P) = \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| < \varepsilon \,, \tag{4.28}$$

*e, se vale la (4.28) per ogni $\varepsilon > 0$, si ha che*

$$\int_I f = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \int_I \underline{f}_P = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \int_I \bar{f}_P \,. \tag{4.29}$$

[15] La scelta degli indici solo pari è fatta per comodità di notazioni.

[16] Se $I_2 \ne \emptyset$ e se $x_2 \in I_2$, $I_1 := (-\infty, x_2) \cap I_2^c$; se $I_4 \ne \emptyset$ e $x_4 \in I_4$, $I_3 := (x_2, x_4) \cap I_2^c \cap I_4^c$, etc.

[17] Su $I_j$, $\alpha_j \le f \le \beta_j \implies \alpha_j \le \underline{f}_P \le f \le \bar{f}_P \le h$.

Inoltre, data $P = \{I_j\}$ e fissati arbitrariamente punti $x_j \in I_j$, si ha

$$\underline{f}_P \leq \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\chi_{I_j} \leq \bar{f}_P\,,$$

per cui vale la seguente

**Proposizione 4.28** *Se $f \in \mathscr{R}(I)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P = \{I_j\}$ di $I$ tale che per ogni scelta di punti $x_j \in I_j$ si ha*

$$\Big|\int_I f - \sum_{j=1}^{n} f(x_j)|I_j|\Big| < \varepsilon\,, \qquad (\forall x_j \in I_j)\,; \tag{4.30}$$

*inoltre, per ogni $n$ esistono partizioni*[18] $\mathcal{P}_n = \{I_j^{(n)} \big| 1 \leq j \leq N_n\}$ *tali che, per ogni $x_j^{(n)} \in I_j^{(n)}$ si ha:*

$$\int f = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{N_n} f(x_j^{(n)})\,|I_j^{(n)}|\,. \tag{4.31}$$

La somma in (4.30) viene a volte chiamata *somma di Riemann* (rispetto alla partizione $P$ e alla scelta di punti $\{x_j\}$). Naturalmente, *si può scegliere la partizione $\{I_j\}$ in modo tale che* $|I_j| > 0$, $\forall j$ (poiché se $|I_j| = 0$, il termine corrispondente non contribuisce alla somma in (4.30)).

### Classi di funzioni Riemann integrabili

Dato un intervallo limitato $I$, abbiamo visto che $S(I) \subseteq \mathscr{R}(I)$. Vediamo qui altri esempi notevoli di classi di funzioni integrabili.

**Proposizione 4.29 (Integrabilità delle funzioni monotòne)** *Sia $I$ un intervallo limitato e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna e limitata su $I$. Allora, $f \in \mathscr{R}(I)$.*

**Dimostrazione** Possiamo assumere che $f$ sia crescente e che[19] $I = [a, b]$. Siano $m = f(a) = \inf_I f$, $M = f(b) = \sup_I f$. Fissiamo $\varepsilon > 0$, e siano $x_j$ tali che $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ con $(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon/(M - m)$. Gli intervalli $I_j = [x_{j-1}, x_j)$, $1 \leq j \leq n-1$ e $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ formano una partizione di $[a, b]$ e, poiché $f$ è crescente, $f(x_{j-1}) \leq f(x) \leq f(x_j)$ per ogni $x \in I_j$. Dunque:

$$\sum_{j=1}^{n}(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)|I_j| \leq \sum_{j=1}^{n}(f(x_j) - f(x_{j-1})|I_j| < \sum_{j=1}^{n}(f(x_j) - f(x_{j-1})\frac{\varepsilon}{M-m} = \varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

Una seconda classe notevole di funzioni integrabili sono le funzioni continue e limitate:

**Proposizione 4.30 (Integrabilità delle funzioni continue)** *Sia $I$ un intervallo limitato e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata su $I$. Allora, $f \in \mathscr{R}(I)$.*

---

[18] Basta prendere $\varepsilon = 1/n$ in (4.30).

[19] Se $f$ è decrescente $-f$ è crescente e $f \in \mathscr{R}(I) \iff -f \in \mathscr{R}(I)$; si ricordi, poi, il punto **(d)** del Teorema 4.24.

La dimostrazione di questa proposizione segue da un importante risultato dovuto a Heine e Cantor (che dimostreremo nel Capitolo 6), che implica che *se $f$ è continua su intervallo compatto $[a,b]$ allora $f$ è uniformemente continua su*[20] $[a,b]$.

**Dimostrazione** Per il punto **(d)** del Teorema 4.24, possiamo assumere che $I$ sia un intervallo compatto $[a,b]$, nal qual caso, come qui sopra osservato, vale (2.26) con $A=[a,b]$. Dunque, fissato $\varepsilon>0$, esiste $\delta>0$ tale che $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon/(b-a)$ per ogni $x,y$ in $[a,b]$. Sia ora $\{I_j \big| 1\le j\le n\}$ una qualunque partizione di $I$ con intervalli di lunghezza $|I_j|<\delta$. Allora[21],

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sup_{I_j} f-\inf_{I_j}\Big)|I_j|\le\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}|I_j|=\varepsilon\,. \qquad \blacksquare$$

**Osservazione 4.31** Le funzioni lipschitziane sono uniformemente continue[22] e dalla dimostrazione precedente e dalla Proposizione 4.28 segue che, *se $f$ è lipschitziana su $[a,b]$ con costante di Lipschitz $L>0$, per ogni $\varepsilon>0$ se $P=\{I_1,\dots,I_n\}$ è una partizione di $[a,b]$ con $|I_j|<\delta:=\varepsilon/L(b-a)$, allora per ogni scelta di punti $x_j\in I_j$, segue la* (4.30).

[20] Si ricordi la Definizione 2.54.

[21] Si osservi che se $f:A\to\mathbb{R}$ e $f(x)-f(y)\le L$, $\forall x,y\in A$, allora $\sup_A f-\inf_A f\le L$: infatti, $f(x)-f(y)\le L\implies f(y)\ge f(x)-L\implies \inf_A f\ge f(x)-L\implies f(x)\le\inf_A f+L\implies \sup_A f\le\inf_A f+L$.

[22] Osservazione 2.55.