4.2.3 L'integrale di Riemann tra a e b

Dall'additività dell'integrale di Riemann (4.21), segue, in particolare che se f è integrabile su $[a, b]$ allora[22]

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,a]} f + \int_{(a,b)} f + \int_{[b,b]} f = \int_{(a,b)} f$$

e analogamente se f è integrabile su $[a, b)$ o $(a, b]$: in altre parole *il valore dell'integrale di f su un intervallo limitato I non dipende dall'appartenenza o meno degli estremi ad I*. Questo permette di definire in modo non ambiguo per una funzione f integrabile su un intervallo I con estremi a e b

$$\int_a^b f := \int_I f\,, \quad \text{o con notazione classica}\,, \quad \int_a^b f(x)dx := \int_I f(x)dx\,. \tag{4.29}$$

Quindi (sempre per additività) se I è un intervallo limitato di estremi $a < b$ e $f \in \mathscr{R}(I)$, si ha che

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f\,, \qquad \forall\, a < c < b\,. \tag{4.30}$$

È utile rimuovere il vincolo di ordine nella (4.30). A questo scopo poniamo la seguente

Definizione 4.32 *Sia I un intervallo limitato e $f \in \mathscr{R}(I)$ se $a < b$ sono punti in $\bar{I} := I \cup \mathcal{D}I$ poniamo*

$$\int_b^a f := -\int_a^b f\,, \qquad \forall\, b > a\,,\ (a, b \in \bar{I})\,. \tag{4.31}$$

Naturalmente, da (4.31) segue immediatamente che

$$\int_a^b f := -\int_b^a f\,, \qquad \forall\, a, b \in \bar{I}\,. \tag{4.32}$$

Ora, da (4.32) segue che *la* (4.30) *vale a prescindere dall'ordine di a, b, c*:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,, \qquad \forall\, a, b, c \in \bar{I}\,; \tag{4.33}$$

ad esempio, se $c < a < b$

$$\int_a^c f + \int_c^b f := -\int_c^a f + \int_c^b f \overset{(4.30)}{=} -\int_c^a f + \int_c^a f + \int_a^b f = \int_a^b f\,.$$

Gli altri casi si trattano in modo analogo[23].

[22] Si ricordi che $|[a, a]| = 0$.

[23] Esercizio **4.7**.

Esercizi

Esercizio 4.4 Dimostrare che le funzioni x e x^2 sono integrabili su $(0,1)$ e calcolarne l'integrale usando la Proposizione 4.22.

Esercizio 4.5 (Una funzione a 'infiniti scalini'). Sia $I_n := [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $\{\alpha_n\}$ una successione limitata e $f := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{I_n}$. Dimostrare che $f \in \mathcal{R}([0,1])$ e calcolare $\int_{[0,1]} f$.

Esercizio 4.6 Sia $I = [0,1]$, $Q := \mathbb{Q} \cap I$ e $f = \chi_Q$. Dimostrare che $\mathcal{I}_I^-(f) = 0$ e $\mathcal{I}_I^+(f) = 1$ e quindi che $f \notin \mathcal{R}(I)$.

Esercizio 4.7 Dimostrare la (4.33) in tutti i casi possibili.

4.3 Teorema fondamentale del calcolo

Il risultato più importante relativo al calcolo differenziale e integrale è senz'altro il "teorema fondamentale del calcolo", la cui dimostrazione è, a questo punto, assai semplice.

Vi sono vari enunciati del teorema fondamentale del calcolo. Il primo enunciato che dimostreremo è che *se una funzione Riemann integrabile ha una primitiva allora il suo integrale coincide coll'incremento di una (qualunque) sua primitiva*; il secondo enunciato dice che *la "funzione integrale" F (Definizione 4.34) di una funzione Riemann integrabile f è derivabile nei punti di continuità di f e in tali punti $F'(x) = f(x)$.*

Questi due enunciati dicono che, sostanzialmente, le "operazioni" di derivata e integrale sono l'una l'inversa dell'altra.

In questa sezione I denota un intervallo arbitrario di $\mathbb{R}$ (non necessariamente limitato).

Teorema 4.33 (Teorema fondamentale del calcolo (1))
Sia I un intervallo, e $f \in \mathcal{R}(I)$. Se $F : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I, allora

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) , \qquad \forall\, a, b \in I . \tag{4.34}$$

In particolare, se G è derivabile su I e $G' \in \mathcal{R}(I)$, allora

$$\int_a^b G' = G(b) - G(a) , \qquad \forall\, a, b \in I . \tag{4.35}$$

Dimostrazione Siano $a < b$ punti di I e fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la Proposizione 4.28 (con $I = [a,b]$) esiste una partizione $P = \{I_j\}$ di I come in (4.27) e scegliamo i punti $x_j \in (a_j, b_j)$, dove $a_j < b_j$ sono gli estremi di I_j, in modo tale che valga il teorema del valor medio di Lagrange per la funzione F sull'intervallo $[a_j, b_j]$, cosicché:

$$F(b_j) - F(a_j) = F'(x_j)(b_j - a_j) = f(x_j)(b_j - a_j) , \tag{4.36}$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che F è una primitiva di f. Allora,

$$\begin{aligned}\varepsilon &\overset{(4.27)}{>} \Big|\int_I f - \sum_{j=1}^n f(x_j)|I_j|\Big| = \Big|\int_I f - \sum_{j=1}^n f(x_j)(b_j - a_j)\Big| \\ &\overset{(4.36)}{=} \Big|\int_I f - \sum_{j=1}^n \big(F(b_j) - F(a_j)\big)\Big| = \Big|\int_I f - \big(F(b) - F(a)\big)\Big| ,\end{aligned}$$

essendo l'ultima somma su j una somma telescopica. Dall'arbitrarietà di ε segue (4.34) se $a < b$; se $a = b$, (4.34) è banalmente vera, e se $b < a$, (4.34) segue dalla Definizione 4.32. La (4.35) segue da (4.34) con $F = G$ essendo, ovviamente, G una primitiva di G'. ∎

Per il secondo classico enunciato del teorema fondamentale del calcolo dobbiamo introdurre la "funzione integrale di una funzione Riemann integrabile", che generalizza il concetto di "area di una regione piana sottesa dal grafico di una funzione".

Definizione 4.34 *Sia I un intervallo limitato, $x_0 \in I$ e $f \in \mathscr{R}(I)$. Chiamiamo* **funzione integrale di f (con punto base x_0)** *la funzione definita come*

$$x \in I \mapsto F(x) = F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^{x} f\,. \tag{4.37}$$

Teorema 4.35 (Teorema fondamentale del calcolo (2))
Sia I un intervallo limitato, $x_0, x_1 \in I$ e $f \in \mathscr{R}(I)$ continua in x_1. Allora, la funzione integrale di f, $x \to F(x) := F_{x_0}(x)$ definita in (4.37), è derivabile in x_1 e si ha $F'(x_1) = f(x_1)$.

Dimostrazione Calcoliamo il rapporto incrementale di F nel punto x_1: per ogni h tale che $x_1 + h \in I$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{F(x_1+h) - F(x_1)}{h} &\overset{(4.37)}{=} \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{x_1+h} f - \int_{x_0}^{x_1} f\Big) \overset{(4.32)}{=} \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{x_1+h} f + \int_{x_1}^{x_0} f\Big) \\ &\overset{(4.33)}{=} \frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} f = f(x_1) + \frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} \big(f - f(x_1)\big) \\ &=: f(x_1) + \alpha\end{aligned}$$

dove $\alpha = \alpha(h) := \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_1}^{x_1+h} \big(f - f(x_1)\big)$.

La tesi è dunque equivalente a mostrare che $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, cosa che segue facilmente dalla continuità di f in x_1 (ipotesi che ancora non abbiamo usato). Sia $\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$ con $0 < |x - x_1| < \delta$, sia $0 < |h| < \delta$ (con $x_1 + h \in I$) e sia $I_h \subseteq I$ l'intervallo aperto di estremi x_1 e $x_1 + h$. Per ogni $x \in I_h$, si ha dunque $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$, il che implica:

$$|\alpha(h)| = \frac{1}{|h|}\Big|\int_{I_h} \big(f - f(x_1)\big)\Big| \le \frac{1}{|h|}\int_{I_h} \big|f - f(x_1)\big| \le \frac{1}{|h|}\int_{I_h} \varepsilon = \varepsilon. \quad ∎$$

Osservazione 4.36 (i) Come anticipato nell'Osservazione 3.58–(iv), il Teorema 4.35 mostra che una funzione continua su un intervallo ha sempre una primitiva.
(ii) Se $v \in C(I)$, allora l'unica soluzione dell'equazione differenziale (3.84) è data da

$$x(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)ds\,.$$

(iii) La formula (4.34) permette di calcolare esplicitamente l'integrale di Riemann per tutte le funzioni Riemann integrabili di cui si sanno calcolare le primitive. Questa è l'applicazione più importante del calcolo delle primitive sviluppato nella Sezione 3.5.