4.3.1 Integrazione per parti e cambio di variabile

Notazione È d'uso comune denotare l'incremento di una funzione tra due punti a e b su cui sia definita con parantesi quadrate ponendo[23]:

$$[f]_a^b \coloneqq f(b) - f(a), \qquad \big(f : I \to \mathbb{R}\,; a, b \in I\big). \tag{4.38}$$

Corollario 4.37 (Integrazione per parti) *Siano f, g derivabili su I intervallo con con $(fg)'$ e $f'g$ Riemann integrabili . Allora, $fg' \in \mathcal{R}(I)$ e per ogni $a, b \in I$ si ha che*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'. \tag{4.39}$$

Dimostrazione Dalla regola di derivazione del prodotto e dalle ipotesi segue che $fg' = (fg)' - f'g \in \mathcal{R}(I)$, e, per il Teorema fondamentale del calcolo 4.33, si ha che

$$[fg]_a^b \overset{(4.35)}{=} \int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'. \qquad \blacksquare$$

Corollario 4.38 (Cambio di variabile) *Siano E, I intervalli, $f \in C(E)$, $\varphi \in C^1(I)$ con f e φ' limitate e $\varphi(I) \subseteq E$. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in I$, si ha*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi \cdot \varphi', \qquad a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta). \tag{4.40}$$

Dimostrazione Si fissi $x_0 \in E$ e sia $F(x) = F_{x_0}(x)$ la funzione integrale (4.37) di f con punto base x_0. Allora, dal Teorema fondamentale del calcolo 4.35 e dalla regola della catena segue che $f\circ\varphi \cdot \varphi' = F'\circ\varphi \cdot \varphi' = (F\circ\varphi)'$, e quindi

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi \cdot \varphi' = \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)' \overset{(4.35)}{=} [F\circ\varphi]_\alpha^\beta = [F]_a^b \overset{(4.34)}{=} \int_a^b f. \qquad \blacksquare$$

Osservazione 4.39 (i) Se riscriviamo la formula (4.40) nella notazione classica e denotiamo la funzione $t \in I \mapsto \varphi(t) = x(t) \in E$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)x'(t)dt, \qquad a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta), \tag{4.41}$$

dunque: nel "cambio di variabile" $x = x(t)$, si calcola la funzione f nella nuova variabile, gli estremi α e β sono due punti che "corrispondono" a a e b, rispettivamente, e il "dx" va sostituito con $x'(t)dt = \frac{dx}{dt}\,dt$ che suggerisce l'identità formale

$$dx = x'(t)dt = \frac{dx}{dt}\,dt. \tag{4.42}$$

(ii) Sebbene abbiamo chiamato il Corollario 4.38 "cambio di variabile", non abbiamo assunto che la funzione φ sia biunivoca o iniettiva e può, ad esempio capitare che ci siano più punti α, α',... diversi tra loro tali che $a = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha') = ...$, mentre, se φ è invertibile allora esisteranno due soli punti $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ e $\beta = \varphi^{-1}(b)$ per cui vale la (4.40).

[23] La funzione f è definita in a e in b ma non necessariamente nell'intervallo con tali estremi.

Esempio 4.40 Dimostriamo che

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{4.43}$$

Infatti, (in corrispondenza di alcune uguaglianze ci sono delle note esplicative):

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx &\overset{(4.33)}{=} \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2} dx + \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} dx \\
&\overset{(a)}{=} -\int_{1}^{0} \sqrt{1-t^2} dt + \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} dx \\
&\overset{(4.32)}{=} \int_{0}^{1} \sqrt{1-t^2} dt + \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} dx \\
&\overset{(b)}{=} 2\int_{0}^{\pi/2} |\cos t| \cos t\, dt \overset{(c)}{=} 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\
&= \int_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2x) dx = \int_{0}^{\pi/2} dx + \int_{0}^{\pi/2} \cos 2x\, dx \\
&\overset{(d)}{=} \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

(a): cambio di variabile $x = -t$ nel primo integrale.
(b): cambio di variabile $x = \operatorname{sen} t$.
(c): tra 0 e $\pi/2$, $\cos t \geq 0$.
(d): una primitiva di $\cos 2x$ è $\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$ e poi usiamo il Teorema fondamentale del calcolo (4.34).

Osservazione 4.41 (Simmetrie nell'integrazione) In matematica, così come in fisica, le simmetrie sono di fondamentale importanza e questo si riflette anche nell'integrazione semplificando, a volte, i calcoli. Vediamone due esempi:

(i) Se $f \in \mathscr{R}\big((-a,a)\big)$, $a > 0$, è una funzione pari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx\,, \qquad \big(f(-x) = f(x)\big)\,. \tag{4.44}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x) dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = -\int_{a}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{a} f(x) \\
&= \int_{0}^{a} f(t)\, dt + \int_{0}^{a} f(x) \\
&= 2\int_{0}^{a} f\,.
\end{aligned}$$

Con un calcolo del tutto analogo si vede invece che se $f \in \mathscr{R}\big((-a,a)\big)$, $a > 0$, è una funzione dispari, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,, \qquad \big(f(-x) = -f(x)\big)\,. \tag{4.45}$$

(ii) Se $f \in \mathscr{R}\big((-a,a)\big)$ per ogni $a > 0$ ed è periodica di periodo $T > 0$, allora, $\forall a$,

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx\,, \qquad \big(f(x+T) = f(x)\big)\,. \tag{4.46}$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx &\overset{(4.33)}{=} \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a+T} f(x)\,dx \\
&\overset{(a)}{=} \int_{a+T}^{T} f(t-T)\,dt + \int_{0}^{a+T} f(x)\,dx \\
&\overset{(b)}{=} \int_{a+T}^{T} f(t)\,dt + \int_{0}^{a+T} f(x)\,dx \\
&\overset{(4.33)}{=} \int_{0}^{T} f(t)\,dt
\end{aligned}$$

(a): cambio di variabile $x = t - T$ nel primo integrale.
(b): essendo f periodica di periodo T, si ha anche $f(t + mT) = f(t)$ per ogni t e per ogni $m \in \mathbb{Z}$ (qui $m = -1$).

4.3.2 Formula di Taylor con resto integrale

Dal Teorema fondamentale del calcolo segue una nuova dimostrazione della formula di Taylor – *indipendente dal* § 3.4 – con una espressione esplicita per il resto.

Lemma 4.42 *Sia $n \in \mathbb{N}$ e $F \in C^n([0,1])$. Allora,*

$$F(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)dt\,. \tag{4.47}$$

Dimostrazione Dimostriamo il lemma per induzione. Per $n = 1$, la (4.47) diviene

$$F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t)dt$$

che segue dal Teorema fondamentale del calcolo. Assumiamo che (4.47) valga e dimostriamola per $n+1$. Integrando per parti si ha:

$$
\begin{aligned}
F(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} &\overset{(4.47)}{=} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)dt \\
&= \left[-\frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n)} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt \\
&= \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Proposizione 4.43 (Formula di Taylor con resto integrale) *Se f è $C^{n+1}(I)$ con I intorno di x_0 allora, per ogni $x \in I$, si ha*

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x;x_0) \tag{4.48}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{con :} \qquad R_n(x;x_0) &:= (x-x_0)^{(n+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big)dt \\
&= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(y)\,(x-y)^n dy\,,
\end{aligned}
$$

$$
|R_n(x;x_0)| \le \frac{\sup_I |f^{(n+1)}|}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}\,. \tag{4.49}
$$

Dimostrazione La (4.48) segue dal Lemma ponendo $F(t) := f\big(x_0 + t(x-x_0)\big)$ ed osservando che $F^{(k)}(t) = f^{(k)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big) \cdot (x-x_0)^k$ per ogni $0 \le k \le n+1$; l'uguaglianza tra i due integrali nella (4.48) segue dal cambio di variabile $y = x_0 + t(x-x_0)$.
La (4.49) segue immediatamente dalla (4.48) e dalla identità $\int_0^1 (1-t)^n = 1/(n+1)$. $\blacksquare$

Ulteriori applicazioni del teorema fondamentale del calcolo verranno discussi nella sezione § 4.6.

Esercizi

Esercizio 4.8 Si dimostri il seguente "teorema della media integrale":

Sia f continua sull'intervallo E. Allora, per ogni $a, b \in E$, esiste x tra a e b tale che

$$
f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\,. \tag{4.50}
$$

[**Suggerimento**: Si usi il teorema del valor medio per funzioni continue.]

Esercizio 4.9 (Approssimazioni regolari di funzioni caratteristiche)
(i) Sia $x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_0(x)$ la funzione che vale 0 per $x \le 0$ e $\varphi_0(x) = e^{-1/x}$ per $x > 0$. Dimostrare che,

per $x > 0$, $\varphi_0^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\varphi_0(x)$ dove P_n è un polinomio di grado $n-1$. Dedurne che $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che $\varphi_0^{(n)}(0) = 0$ per ogni n.

(ii) Sia $\varphi_1(x) \coloneqq \varphi_0(x)\varphi_0(1-x)$. Dimostrare che: $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_1(x) = 0$ se $x \le 0$ o se $x \ge 1$ e che $\varphi_1(x) > 0$ per $x \in (0,1)$.

(iii) Sia $\varphi(x) \coloneqq 0$ se $x \le 0$ e $\varphi(x) \coloneqq c_0 \int_0^x \varphi_1$ per $x > 0$, dove $c_0 \coloneqq \left(\int_0^1 \varphi_1\right)^{-1}$. Dimostrare che: $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = 0$ se $x \le 0$; $\varphi(x) = 1$ se $x \ge 1$, $\varphi'(x) > 0$ per $x \in (0,1)$.

(iv) Siano $a < b$. Per ogni $\delta < (b-a)/2$, determinare una funzione $\psi_\delta(x)$ tale che: $\psi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$; $\psi_\delta(x) = 0$ se $x \notin (a,b)$; $\psi_\delta(x) = 1$ per ogni $a+\delta \le x \le b-\delta$; $\psi_\delta'(x) > 0$ per $x \in (a, a+\delta)$ e $\psi_\delta'(x) < 0$ per $x \in (b-\delta, b)$.

(v) Dimostrare che per ogni intervallo I che contenga l'intervallo $[a,b]$, $\int_I |\chi_{[a,b]} - \psi_\delta| < 2\delta$.