4.5 Area e lunghezza

Area

L'integrale della funzione costante $f(x) \equiv h > 0$ tra 0 e $b > 0$ è bh, che per la geometria euclidea è l'area del rettangolo di base b e altezza h. Più in generale, se $P = \{I_1, ..., I_n\}$ è una partizione di $[0, b]$, possiamo interpretare l'integrale di una funzione a scalini $\sum \alpha_j \chi_{I_j}$, con $\alpha_j > 0$ come l'area del "pluri–rettangolo" formato dall'unione dei rettangoli di base I_j e altezze α_j. Questa osservazione è alla base della seguente definizione di area.

Definizione 4.52 (i) *Siano $g \leq f$ due funzioni integrabili sull'intervallo limitato E. Chiamiamo* **dominio normale di base** E **tra** g **e** f *la seguente regione di* $\mathbb{R}^2$

$$D = D_{g,f}(E) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, x \in E \, , \; g(x) \leq y \leq f(x)\} \, , \tag{4.65}$$

e definiamo la sua **area** *come*

$$\operatorname{area}(D) := \int_E (f - g) \, . \tag{4.66}$$

Nel caso $g = 0$ poniamo $D_f(E) := D_{0,f}(E)$.

(ii) *Se un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato è unione disgiunta di un numero finito di domini normali D_i, $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$, poniamo*

$$\operatorname{area}(D) := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{area}(D_j) \, . \tag{4.67}$$

Osservazione 4.53 (i) Si osservi che, dalle definizioni date, segue immediatamente che $\operatorname{area}(D_{g,f}(E)) = \operatorname{area}(D_{f-g}(E))$. Inoltre, non è difficile verificare che la formula (4.67) *non dipende* dal particolare modo in cui D viene scomposto in unione disgiunta di domini normali (e che quindi la definizione è ben posta): vedi Esercizio 4.14 a fine paragrafo.

(ii) Usando l'integrale improprio possiamo estendere la nozione di area a insiemi normali non limitati, sostituendo nella Definizione 4.52 l'ipotesi "$g \leq f$ integrabili sull'intervallo limitato E" con "$g \leq f$ funzioni integrabili su $[\alpha, \beta]$ per ogni $\alpha < \beta$ in E intervallo" (quindi f, g ed E possono essere non limitati). In tal caso l'area di $D_{g,f}(E)$ sarà un elemento non negativo di $\mathbb{R}^*$.

Ad esempio si consideri la regione illimitata $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, x \in (0,1) \, , \; \log(x) \leq y \leq 0\}$. Allora, si ha che

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(D) \quad &:= \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 (-\log x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \big(x(1 - \log x)\big)' dx \\
&\overset{(4.38)}{=} \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big[x(1 - \log x)\Big]_0^1 \\
&= \quad 1 - \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon(1 - \log \varepsilon) = 1 \, .
\end{aligned}$$

Concludiamo questa breve discussione sulle aree con la dimostrazione del “ben noto” risultato che asserisce che *l'area del cerchio unitario coincide con π, ossia con la metà della lunghezza della circonferenza unitaria*[29] S^1:

Teorema 4.54 (Area del cerchio) *Sia $r > 0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e*

$$C_r(x_0, y_0) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \le r\right\}. \tag{4.68}$$

Allora $C_r(x_0, y_0)$ è un dominio normale e area $\big(C_r(x_0, y_0)\big) = \pi r^2$.

Naturalmente, $C_r(x_0, y_0)$ è (per definizione) **il cerchio di centro** (x_0, y_0) **e raggio** r.

Dimostrazione La disuguaglianza $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \le r$ che definisce $C_r(x_0, y_0)$ è equivalente alla disuguaglianza $(y-y_0)^2 \le r^2 - (x-x_0)^2$, che, a sua volta, è equivalente alle disuguaglianze

$$\begin{cases} |y - y_0| \le \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} \\ |x - x_0| \le r \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} g(x) := y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} \le y \le f(x) := y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} \\ \\ x_0 - r \le x \le x_0 + r\,. \end{cases}$$

Tali relazioni implicano che $C_r(x_0, y_0)$ è un dominio normale con base $E := [x_0 - r, x_0 + r]$ tra le funzioni (integrabili) g ed f. Dunque, dalla definizione di area (e facendo nella quarta uguaglianza il cambio di variabile $x = x_0 + rt$) segue che

$$\begin{aligned} \text{area}\,\big(C_r(x_0, y_0)\big) &:= \int_E (f-g) = 2\int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}\,dx \\ &= 2r\int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{1 - \Big(\frac{x-x_0}{r}\Big)^2}\,dx \\ &= 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt \\ &\overset{(4.46)}{=} 2r^2\,\frac{\pi}{2} = \pi r^2\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lunghezza

In questa sezione generalizziamo la definizione di lunghezza di archi di circonferenza discussa nella sezione § 3.2.1.

Dato il grafico $G = G_f \subseteq \mathbb{R}^2$ di una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *diremo che una poligonale $P = P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ è inscritta in G se $z_i = \big(x_i, f(x_i)\big)$ con $x_1 := a \le x_2 \le \cdots \le$*

[29] Si osservi che sia la definizione di area che quella di lunghezza della circonferenza sono dati, qui, in termini di numeri reali e *non* di dimensioni fisiche.

$x_n := b$ e $y_i = f(x_i)$; denotiamo $\mathcal{P}_G$ la famiglia di tutte le poligonali inscritte in G. *La lunghezza di* G, $\ell(G)$, *è definita come il* $\sup_{P\in\mathcal{P}_G} \ell(P) \in [0, +\infty]$.

Una condizione che garantisca che la lunghezza del grafico di f sia finita è che f sia C^1 a tratti su[30] $[a, b]$.

Proposizione 4.55 *Se* $f \in C^1$ *a tratti su* $[a, b]$, *allora il suo grafico ha lunghezza finita data da*

$$\ell(G) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,. \tag{4.69}$$

Dimostrazione Chiaramente è sufficiente assumere che $f \in C^1([a, b])$ (il risultato generale segue per additività).
Sia $P = P(z_0, ..., z_n) \in \mathcal{P}_G$, come sopra, una poligonale iscritta in G_f. Dal Teorema di Lagrange segue che, per ogni $1 \le i \le n$ esiste $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tale che

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})\,, \tag{4.70}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\ell(P) &= \sum_{i=1}^n \ell\Big(\mathrm{s}\big((x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\big)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2} \\
&\overset{(4.70)}{=} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'(\xi_i)^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \cdot (x_i - x_{i-1})\,.
\end{aligned}$$

La tesi segue ora dalla Proposizione 4.27. ∎

Questo risultato si generalizza immediatamente al caso in cui f sia differenziabile a tratti su $[a, b]$ e che su ogni tratto (a_i, a_{i+1}) su cui f è differenziabile, $f' \in \mathcal{R}((a_i, a_{i+1}))$.

Esercizi

Esercizio 4.14 (i) Dimostrare che se D_1 e D_2 sono due domini normali con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, allora $D_1 \cap D_2$ è un dominio normale.
(ii) Dimostrare che la definizione data in (ii) è ben posta, ossia che se $D = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$ è un'altra decomposizione di D in domini normali a due a due disgiunti allora

$$\sum_{j=1}^n \mathrm{area}(D_j) = \sum_{j=1}^m \mathrm{area}(D'_j)\,.$$

Esercizio 4.15 Sia $f = x \,\mathrm{sen}\, 1/x$ per $0 < x \le 1$ e $f(0) = 0$. Dimostrare che $\ell(G_f) = +\infty$.

[30] Ossia, $f \in C([a, b])$ ed esistono $a_0 := a_1 < a_2 < \cdots < a_n := b$ tali che $f \in C^1([a_i, a_{i+1}])$ per ogni $0 \le i \le n - 1$.