4.4 Integrali generalizzati (o impropri)

In questo paragrafo presentiamo una generalizzazione dell'integrale di Riemann che permette, in particolare, di trattare funzioni o intervalli non limitati.

Definizione ed esempi

Definizione 4.43 Siano $a < b$ in $\mathbb{R}^*$ e sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è integrabile secondo Riemann in senso **generalizzato (o improprio)** su (a, b) se $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$ e se, fissato $x_0 \in (a, b)$, esistono finiti i limiti

$$\lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_{\alpha}^{x_0} f(x) dx \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\beta \rightarrow b-} \int_{x_0}^{\beta} f(x) dx \in \mathbb{R}. \quad (4.54)$$

In tal caso poniamo

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_{\alpha}^{x_0} f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow b-} \int_{x_0}^{\beta} f(x) dx. \quad (4.55)$$

La classe delle funzioni integrabili in senso improprio su $I = (a, b)$ verrà denotata con $\mathcal{R}^*(I)$.

Osservazione 4.44 (i) Poiché, per ogni x_0 e x_1 in (a, b) ,

$$\int_{\alpha}^{x_1} f = \int_{\alpha}^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_1} f, \quad \int_{x_1}^{\beta} f = \int_{x_0}^{\beta} f - \int_{x_0}^{x_1} f$$

si vede subito che la definizione è ben posta, ossia che la condizione in (4.54) non dipende dalla particolare scelta di x_0 e che il valore in (4.55) è indipendente dalla scelta di $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Se $I = (a, b)$ è un intervallo aperto e limitato e $f \in \mathcal{R}(I)$, allora $f \in \mathcal{R}^*(I)$ e il valore degli integrali (in senso standard e in senso improprio) coincidono. Infatti, se $x_0, \beta \in (a, b)$, e²³ $M = \sup_{(a,b)} |f|$,

$$\lim_{\beta \rightarrow b-} \left| \int_{\beta}^{x_0} f \right| \leq \lim_{\beta \rightarrow b-} M \int_{\beta}^{x_0} 1 = \lim_{\beta \rightarrow b-} M(b - \beta) = 0, \quad (4.56)$$

da cui:

$$\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_{x_0}^{\beta} f = \lim_{\beta \rightarrow b-} \int_{x_0}^b f - \int_{\beta}^b f = \int_{x_0}^b f, \quad \forall f \in \mathcal{R}((a, b)), \quad (4.57)$$

Analogamente,

$$\lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_{\alpha}^{x_0} f = \int_a^{x_0} f, \quad \forall f \in \mathcal{R}((a, b)). \quad (4.58)$$

²³Essendo f integrabile su (a, b) , è limitata su (a, b) e quindi $\sup_{(a,b)} |f| < \infty$.

Dunque, l'integrale in senso improprio è una estensione della nozione standard di integrale di Riemann ad intervalli aperti eventualmente non limitati e a funzioni eventualmente non limitate.

(iii) Chiaramente se $f \in \mathcal{R}^*(I)$ allora $f \in \mathcal{R}^*(J)$ per ogni intervallo $J \subseteq I$.

(iv) Siano $a < b$ in $\mathbb{R}^*$ e $f \in \mathcal{R}^*((a, b))$. Allora

$$\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_a^\alpha f = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_\beta^b f = 0, \quad (f \in \mathcal{R}^*((a, b))). \quad (4.59)$$

Infatti, se $x_0 \in (a, b)$, $\int_\beta^b f = \left(\int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^\beta f \right) \rightarrow 0$ quando $\beta \rightarrow b^-$, e analogamente per l'estremo sinistro.

(v) Se $f \geq 0$, l'integrale improprio di f su (a, b) (con $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$) converge o diverge²⁴, poichè $\int_\alpha^\beta f \geq 0$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$.

Esempio 4.45 (L'integrale di x^α)

(i) Sia $I = (0, 1)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, e consideriamo la funzione $x \rightarrow x^\alpha$. Poichè tale funzione appartiene a $\mathcal{R}((\varepsilon, 1))$ per ogni $0 < \varepsilon < 1$, in vista dell'Osservazione 4.44–(ii), dobbiamo

studiare solo il $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 x^\alpha dx$. Ora, per $\alpha \neq -1$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 x^\alpha dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} 1/(\alpha+1), & \text{se } \alpha > -1 \\ +\infty, & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

mentre per $\alpha = -1$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_\varepsilon^1 = +\infty.$$

Dunque $x^\alpha \in \mathcal{R}^*((0, 1))$ se e solo se $\alpha > -1$.

(ii) Consideriamo di nuovo la funzione $x \rightarrow x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sull'intervallo $(1, +\infty)$. In tal caso troviamo:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^\alpha dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^b = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha > -1 \\ 1/|\alpha+1|, & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\log x]_1^b = +\infty$$

Dunque $x^\alpha \in \mathcal{R}^*((1, +\infty))$ se e solo se $\alpha < -1$.

(iii) In particolare, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^\alpha \notin \mathcal{R}^*((0, +\infty))$.

²⁴Più precisamente, convergono o divergono i limiti in (4.54).

Criteri di integrabilità generalizzata

Proposizione 4.46 (i) **(Criterio del confronto)** Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $0 \leq f \leq g$ funzioni da $I := (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f, g \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$. Se $g \in \mathcal{R}^*(I)$ allora $f \in \mathcal{R}^*(I)$; se $f \notin \mathcal{R}^*(I)$, allora $g \notin \mathcal{R}^*(I)$.

(ii) **(Criterio del confronto asintotico)** Sia $a \in \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}^*$ e $0 < f, g$ funzioni da $I := [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f, g \in \mathcal{R}([a, \beta])$ per ogni $a < \beta < b$. Se $\lim_{x \rightarrow b^-} f/g = c > 0$ allora $f \in \mathcal{R}^*([a, b))$ se e solo se $g \in \mathcal{R}^*([a, b))$.

(iii) **(Criterio di convergenza assoluta)** Sia $I = (a, b)$ con $a < b$ in $\mathbb{R}^*$ e sia $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$. Supponiamo che $|f| \in \mathcal{R}^*(I)$. Allora $f \in \mathcal{R}^*(I)$ e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \quad (4.60)$$

Dimostrazione (i) segue immediatamente dalla relazione

$$0 \leq \int_a^\beta f \leq \int_a^\beta g$$

valida per ogni $a < \alpha < \beta < b$.

(ii) Dalle ipotesi segue che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $(c/2)g(x) \leq f(x) \leq (3c/2)g(x)$ per ogni $x_0 < x < b$ e quindi la tesi segue dal punto (i).

(iii) segue dal criterio del confronto (i) ricordando che $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. ■

Definizione 4.47 Se $I = (a, b)$ con $a < b$ in $\mathbb{R}^*$, $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$ e $|f| \in \mathcal{R}^*(I)$, diremo che l'integrale di f converge assolutamente su I e denoteremo la classe di tali funzioni con $\mathcal{R}_1^*(I)$.

Osservazione 4.48 (i) Ovviamente vale il risultato analogo del criterio del confronto asintotico anche per l'estremo sinistro.

(ii) Il criterio di convergenza per confronto con serie e l'Esempio 4.45 danno una nuova dimostrazione della convergenza/divergenza della serie di Riemann $\sum 1/n^\alpha$.

(iii) Il criterio di convergenza assoluta implica che $\mathcal{R}_1^*(I) \subseteq \mathcal{R}^*(I)$ (e che in tal caso $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$), ma, in generale, $\mathcal{R}_1^*(I) \subsetneq \mathcal{R}^*(I)$ come mostra il seguente

Esempio 4.49 La funzione $f(x) := (\sin x)/x$ per $x > 0$ e $f(0) = 1$ è Riemann integrabile su $[0, b]$ per ogni $b > 0$. Integrando per parti (tra 1 e b e poi mandando b a infinito) si vede che $f \in \mathcal{R}^*([0, +\infty))$, ma non è difficile verificare che²⁵ $f \notin \mathcal{R}_1^*([0, +\infty))$.

Esercizi

Esercizio 4.10 Dimostrare che la funzione f nell'Esempio 4.49 non appartiene a $\mathcal{R}_1^*([0, +\infty))$.

[Suggerimento: Sia $I_n = [n\pi - \pi/4, n\pi + \pi/4]$ e si determini $c > 0$ tale che $|f(x)| \geq c/n$ su I_n , $\forall n \geq 1$.]

²⁵Esercizio 4.10.

Esercizio 4.11 Sia $0 < f \in C^1([a, +\infty))$ una funzione decrescente e tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che $f(x) \sin x$ e $f(x) \cos x \in \mathcal{R}^*([a, +\infty))$.

Esercizio 4.12 Sia g una funzione periodica, integrabile e a media nulla²⁶. Dimostrare che una qualunque primitiva di g è periodica (con lo stesso periodo di g) e, in particolare, che esiste un'unica primitiva G di g a media nulla. Dimostrare che l'ipotesi che g è a media nulla non può essere eliminata (ossia che se g non è a media nulla non esiste una primitiva periodica di g).

Esercizio 4.13 Generalizzare il risultato dell'Es 4.11 dimostrando che: se $g \in C(\mathbb{R})$ è periodica e a media nulla e $0 < f \in C^1([a, +\infty))$ è monotona decrescente con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ allora $fg \in \mathcal{R}^*([a, +\infty))$.

L'integrale di Gauss

Concludiamo questa sezione sull'integrabilità generalizzata osservando che, a volte, è possibile calcolare esplicitamente un integrale improprio di una funzione senza che tale funzione abbia una primitiva "esplicita" (o meglio, esprimibile in termini di funzioni elementari). È questo il caso di un importante integrale, detto integrale di Gauss:

Teorema 4.50 (Valore dell'integrale di Gauss)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.61)$$

Consideriamo la funzione ausiliaria $H(y) := \int_0^1 \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2} dt$, definita per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.51 Per ogni $y \in \mathbb{R}$, $H'(y) = \int_0^1 e^{y(1+t^2)} dt$.

Dimostrazione Fissiamo $y \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Dal limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$, segue che esiste $\delta_0 > 0$ tale che

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| < \varepsilon e^{-2|y|}, \quad \forall |x| < \delta_0. \quad (4.62)$$

Sia $\delta = \delta_0/2$ e si osservi che per ogni $t \in [0, 1]$ e per ogni $0 < |h| < \delta$, si ha $|h(1+t^2)| < 2\delta = \delta_0$, e dunque, per tali h , si ha che

$$\begin{aligned} \left| \frac{H(y+h) - H(y)}{h} - \int_0^1 e^{y(1+t^2)} dt \right| &= \left| \int_0^1 e^{y(1+t^2)} \left(\frac{e^{h(1+t^2)} - 1}{h(1+t^2)} - 1 \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 e^{y(1+t^2)} \left| \frac{e^{h(1+t^2)} - 1}{h(1+t^2)} - 1 \right| dt \\ &\stackrel{(4.62)}{\leq} \varepsilon e^{-2|y|} \int_0^1 e^{y(1+t^2)} dt \leq \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

²⁶Ossia, se $T > 0$ è il periodo di g , allora $\int_0^T g = 0$.

Dimostrazione (del Teorema 4.50) Si definisca

$$F(x) := \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad G(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt. \quad (4.63)$$

Dunque $G(x) = H(-x^2)$ e, per il Lemma e per il teorema fondamentale del calcolo²⁷,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2xH'(-x^2) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \\ &= -2e^{-x^2}F(x) = -2F'(x)F(x) = -(F^2)'(x). \end{aligned}$$

Tale relazione è equivalente a $(F^2 + G)' = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi $F^2 + G$ è una funzione costante. Dunque

$$F^2(x) + G(x) = F(0)^2 + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan } 1 - \text{Arctan } 0 = \frac{\pi}{4}. \quad (4.64)$$

Si osservi che²⁸ $0 \leq G(x) \leq e^{-x^2}$, dunque, prendendo il limite per $x \rightarrow \infty$ in (4.64) si ottiene $\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$, ovvero la tesi. ■

²⁷Nella terza uguaglianza si usi il cambio di variabile $\xi = xt$. Dal teorema fondamentale del calcolo segue che $F'(x) = e^{-x^2}$.

²⁸L'integrando, nella definizione di G è positivo e maggiorato da e^{-x^2} .