Formula di Taylor

Definizione 1 (Polinomio e resto di Taylor) Sia I un intervallo, $n \in \mathbb{N}_0$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile n volte in¹ x_0 . Chiamiamo polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0 il polinomio di grado (al più) n dato da

$$T_{f,n}(x) = T_{f,n}(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (1)$$

Definiamo il resto n -simo di Taylor di f in x_0 , la funzione

$$x \in I \mapsto r_n(x; x_0) = r_{f,n}(x; x_0) := f(x) - T_{f,n}(x; x_0). \quad (2)$$

Si noti che $T_{f,n}(x_0; x_0) = T_{f,0}(x_0; x_0) = f(x_0)$.

Lemma 2 Sia I un intervallo, $n \in \mathbb{N}_0$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile n volte in x_0 . Allora,

$$T'_{f,n}(x; x_0) = T_{f',n-1}(x; x_0); \quad (3)$$

$$\frac{r_{f,n}(x; x_0)}{(x - x_0)^m} = \frac{r_{f',n-1}(\xi; x_0)}{m(\xi - x_0)^{m-1}} \quad (4)$$

dove, in (4), $m \in \mathbb{N}$ e ξ è un punto tra x e x_0 .

Dimostrazione La (3) segue immediatamente dalla Definizione 1:

$$\begin{aligned} DT_{f,n}(x; x_0) &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(1+j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j = T_{f',n-1}(x; x_0). \end{aligned}$$

Ora, per il Teorema del valor medio di Cauchy (applicato all'intervallo di estremi x_0 e x e alle funzioni differenziabili $y \mapsto f(y) - T_{f,n}(y; x_0)$ e² $y \mapsto (y - x_0)^m$), esiste ξ tra x e x_0 tale che:

$$\begin{aligned} \frac{r_{f,n}(x; x_0)}{(x - x_0)^m} &\stackrel{(2)}{=} \frac{f(x) - T_{f,n}(x; x_0)}{(x - x_0)^m} = \frac{f'(\xi) - T'_{f,n}(\xi; x_0)}{m(\xi - x_0)^{m-1}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{f'(\xi) - T_{f',n-1}(\xi; x_0)}{m(\xi - x_0)^{m-1}} \stackrel{(2)}{=} \frac{r_{f',n-1}(\xi; x_0)}{m(\xi - x_0)^{m-1}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3 (Formula di Taylor) Sia I un intervallo, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile n volte in x_0 . Allora,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_{f,n}(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (5)$$

Se, inoltre, f è derivabile $(n+1)$ volte in $I \setminus \{x_0\}$, allora, per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, esiste ξ tra x e x_0 tale che

$$r_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}; \quad (6)$$

in particolare, se $M := \sup_{I, x \neq x_0} |f^{(n+1)}| < +\infty$, allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_{f,n}, \quad |r_{f,n}| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \quad (7)$$

¹Ossia, f è continua in x_0 e (se $n > 0$) sono definite ricorsivamente le prime $(n-1)$ derivate in I ed esiste la derivata di ordine n in x_0 . Si ricordi anche che la derivata di ordine 0 è per definizione la funzione stessa: $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$.

²Si osservi che tali funzioni sono nulle in $y = x_0$.

Dimostrazione Iterando $(n-1)$ volte la (4) con $m = n$, otteniamo che esiste un punto ξ tra x e x_0 tale che

$$\frac{r_{f,n}(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{r_{f^{(n-1)},1}(\xi; x_0)}{n!(\xi - x_0)} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{n!} \left(\frac{f^{(n-1)}(\xi) - f^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right),$$

e quindi, poiché $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, segue la (5) quando $x \rightarrow x_0$.

Per dimostrare la (6) ragioniamo in modo analogo: iterando n volte la (4) con $m = n+1$, otteniamo che esiste un punto $\bar{\xi}$ tra x e x_0 tale che

$$\frac{r_{f,n}(x; x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_{f^{(n)},0}(\bar{\xi}; x_0)}{(n+1)!(\bar{\xi} - x_0)} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{(n+1)!} \frac{f^{(n)}(\bar{\xi}) - f^{(n)}(x_0)}{\bar{\xi} - x_0},$$

da cui, applicando il Teorema valor medio di Lagrange, segue la (6). La (7) segue immediatamente dalla (6) e dalla definizione di M . ■

Definizione 4 (Simboli di Landau) Se g è una funzione definita vicino a x_0 , si dice che $g = o((x - x_0)^n)$ (' g è un o piccolo di $(x - x_0)^n$ ' o, anche, che ' g è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ ') se si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} g/(x - x_0)^n = 0$; si noti che, per $n = 0$, $g = o(1)$ (vicino a x_0) significa che $\lim_{x \rightarrow x_0} g = 0$.

Se g è una funzione definita vicino a x_0 , si dice che $g = O((x - x_0)^n)$ (' g è un O grande di $(x - x_0)^n$ ') se vicino a x_0 si ha che $|g(x)| \leq M(x - x_0)^n$ per una qualche $M > 0$.

Dunque, usando i simboli di Landau, il Teorema 3 si può riformulare come segue:

Se f è derivabile n volte in x_0 , allora³ $f(x) = T_{f,n}(x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$;

se, inoltre, $f^{(n+1)}$ è limitata vicino a x_0 , allora $f(x) = T_{f,n}(x; x_0) + O(|x - x_0|^{n+1})$.

Esercizi

Esercizio 1.1 Le seguenti affermazioni vanno intese 'vicino a $x_0 \in \mathbb{R}$ '.

- (i) Se $f = o((x - x_0)^n)$, allora $f = o((x - x_0)^m)$ per ogni $0 \leq m \leq n$.
- (ii) Se $f = o((x - x_0)^n)$ e $g = o((x - x_0)^m)$, allora $fg = o((x - x_0)^{n+m})$, e $af + bg = o((x - x_0)^p)$ con $p = \min\{n, m\}$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.
- (iii) Se $f = o((x - x_0)^n)$, allora $f/(x - x_0)^m = o((x - x_0)^{n-m})$ per ogni $m \leq n$.

³Naturalmente, dire $f = g + o(|x - x_0|^m)$ significa $f - g = o(|x - x_0|^m)$; e analogamente per $f = g + O(|x - x_0|^m)$.