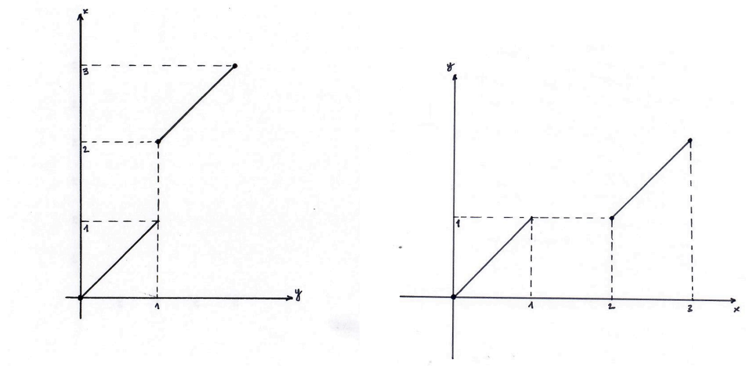

Figura 2.2: L'inversa di una funzione monotòna su un intervallo è continua

Da questa semplice osservazione deriva il seguente notevole

Teorema 2.56 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotòna. Allora la funzione inversa $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to I$ è continua.*

Dimostrazione La funzione inversa f^{-1} è anch'essa strettamente monotòna e quindi, per l'Osservazione 2.55–(ii) può avere solo discontinuità di salto su punti del suo dominio, il che però non è possibile essendo $f^{-1}\big(\mathrm{im}(f)\big) = I$ un intervallo[32]. ∎

Zeri e valori intermedi

Il seguente è forse il risultato più importante sulle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Teorema 2.57 (Esistenza degli zeri di funzioni continue) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora f ha una zero tra a e b, ossia, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione Chiaramente, basta considerare il caso $f(a) > 0 > f(b)$ (altrimenti si consideri $-f$ al posto di f).
Definiamo ricorsivamente due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ come segue:

$a_1 := a$, $b_1 := b$ e se $n \geq 1$ definiamo $c_n := (a_n + b_n)/2$ e

$$\text{se } f(c_n) > 0 \ , \ \text{allora} \begin{cases} a_{n+1} := c_n \\ b_{n+1} := b_n \end{cases} \tag{i}$$

$$\text{se } f(c_n) < 0 \ , \ \text{allora} \begin{cases} a_{n+1} := a_n \\ b_{n+1} := c_n \end{cases} \tag{ii}$$

$$\text{se } f(c_n) = 0 \ , \ \text{allora} \quad a_{n+1} := b_{n+1} := c_n \, . \tag{iii}$$

[28] $g \neq 0$ vicino a x_0 per l'osservazione precedente.
[29] Essendo $x^{\pm} = \dfrac{|x| \pm x}{2}$ (Definizione 1.19).
[30] $\max\{f, g\} = f + (g - f)^+$ e $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$.
[31] Ma ad esempio, $x \in (0, +\infty) \mapsto 1/x$ ha una disconitnuità essenziale in $x_0 = 0$.
[32] Esercizio **2.40**.

Ci sono due casi: o esiste $n \geq 2$ tale che $f(c_n) = 0$ oppure $f(c_n) \neq 0$ per ogni n.
Nel primo caso, poniamo $x_0 = c_n$ e il teorema è dimostrato.

Nel secondo caso, si ha che $\{a_n\}$ è crescente e $\{b_n\}$ è decrescente; inoltre, per ogni n, si ha $f(a_n) > 0 > f(b_n)$ e

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n} \tag{2.26}$$

(la seconda uguaglianza segue immediatamente per induzione). In particolare $a_n < b_n$ per ogni n e quindi $a_n < b_m$ per ogni n ed[33] m. Dal teorema sull'esistenza dei limiti per successioni monotòne e dal teorema del confronto segue che

$$\lim a_n = \sup a_n =: \alpha \leq \beta := \inf b_n = \lim b_n\,. \tag{2.27}$$

Ma allora

$$\beta - \alpha = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) \overset{(2.26)}{=} \lim \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0\,.$$

Poniamo ora $x_0 = \alpha = \beta$. Per continuità si ha che $f(x_0) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$. Ma poiché $f(a_n) \geq 0$ si deve avere (teorema del confronto) $f(x_0) \geq 0$ e poiché $f(b_n) \leq 0$ si deve avere $f(x_0) \leq 0$ il che implica che $f(x_0) = 0$. ∎

Osservazione 2.58 Dalle ipotesi del teorema nulla si può dire del *numero* di zeri tra a e b: ad esempio se $a = -2$, $b = 2$ e $f(x) := x$, si ha un solo zero $x_0 = 0$; mentre se $f(x) := (x+1)$ per $-2 \leq x \leq -1$, $f(x) := 0$ per $-1 \leq x \leq 1$ e $f(x) := (x-1)$ per $1 \leq x \leq 2$, tutti i punti in $[-1,1]$ sono zeri per f.
In ogni caso, *esiste sempre un (unico) "primo zero" di* f, ossia un unico $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$ e tale che $f(x) \cdot f(a) > 0$ per ogni $x \in [a, x_0)$.
Infatti, sia $E := \{\bar{x} \in (a,b) \big| f(\bar{x}) = 0\}$. Per il Teorema 2.57, $E \neq \varnothing$ (e per definizione $E \subseteq (a,b)$ ed è quindi limitato). Sia $x_0 = \inf E \geq a$. Dalla caratterizzazione per successioni dell'estremo inferiore segue che esiste una successione $x_n \in E$ tale che $x_n \to x_0$ e per continuità si ha che $f(x_0) = \lim f(x_n)$, ma essendo $f(x_n) = 0$ per ogni n segue che $f(x_0) = 0$, ossia $x_0 \in E$ è il *minimo* di E. In particolare $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, x_0)$, ma allora $f(x)$ deve avere lo stesso segno di $f(a)$ (altrimenti per il Teorema 2.57 si avrebbe uno zero tra a e $x < x_0$ contraddicendo la minimalità di x_0). ∎

Vediamo alcune conseguenze immediate del Teorema dell'esistenza degli zeri.

Corollario 2.59 (Teorema dei valori intermedi) *Sia I un intervallo e $f \in C(I)$. Allora f assume tutti i valori tra due valori dati $y_i = f(x_i)$, $x_i \in I$.*

Dimostrazione Assumiamo, senza perdita di generalità, che $x_1 < x_2$, e sia $\bar{y}_1 = \min\{y_1, y_2\}$, $\bar{y}_2 = \max\{y_1, y_2\}$. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\bar{y} \in [\bar{y}_1, \bar{y}_2]$, esiste $\bar{x} \in [x_1, x_2]$ tale che $\bar{y} = f(\bar{x})$. Se $\bar{y} = y_i$, prendiamo $\bar{x} = x_i$. Supponiamo ora che $\bar{y} \neq y_i$, ossia che $\bar{y}_1 < \bar{y} < \bar{y}_2$. Poniamo $F(x) := f(x) - \bar{y}$. Allora $F \in C([x_1, x_2])$ e[34] $F(x_1) \cdot F(x_2) < 0$ e l'asserto segue dal Teorema di esistenza degli zeri. ∎

Corollario 2.60 *Sia f una funzione continua su un intervallo I. Allora,*
(i) *$f(I)$ è un intervallo.*
(ii) *f assume tutti i valori compresi (strettamente) tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.*

Dimostrazione (i) segue immediatamente dal Teorema dei valori intermedi e dalla definizione di intervallo.
(ii) : Dalla caratterizzazione di inf e sup segue che se $\inf_I f < \bar{y} < \sup_I f$, esistono due punti

[33] Se $n < m$, allora $a_n \leq a_m < b_m$ e se $n > m$, allora $a_n < b_n \leq b_m$.
[34] Se $\bar{y}_i = y_i$, $F(x_1) < 0 < F(x_2)$; se $\bar{y}_1 = y_2$ e $\bar{y}_2 = y_1$, allora $F(x_1) > 0 > F(x_2)$.

$\bar{x}_i \in I$ tali che $\inf_I f \le f(\bar{x}_1) < \bar{y} < f(\bar{x}_2) \le \sup_I f$ e l'asserto segue dal Teorema dei valori intermedi. ∎

Infine, mettendo assieme il Teorema 2.56 e il Corollario 2.60–(i) si ha

Corollario 2.61 *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotòna e continua. Allora, la funzione inversa di f, f^{-1}, è una funzione continua, strettamente monotòna definita sull'intervallo $J = f(I)$ e con immagine I.*

Osservazione 2.62 Vale la pena osservare che dal Teorema dei valori intermedi segue anche che *su intervalli, le funzione strettamente monotòne e le funzioni iniettive coincidono*; in particolare[35],

Una funzione continua e iniettiva su un intervallo I è strettamente monotòna.

Quindi, nell'enunciato del Corollario 2.61, "strettamente monotòna" può essere sostituito da "iniettiva".

Il Teorema di Weierstrass su intervalli

Mentre il Teorema dell'esistenza degli zeri è intimamente legato all'ordine totale di $\mathbb{R}$, il seguente importante risultato di "ottimizzazione" dovuto originalmente a Weierstrass ammette notevoli generalizzazioni a spazi non totalmente ordinati[36].

Teorema 2.63 *Sia $I = [a,b] = \{x \big| \, a \le x \le b\}$ con $-\infty < a < b < \infty$ e $f \in C(I)$. Allora f assume massimo [e minimo] su I, ossia esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) \ge f(x)$ [rispettivamente, $f(x_0) \le f(x)$], per ogni $x \in I$.*

Nella dimostrazione useremo il seguente lemma interessante di per sé:

Lemma 2.64 *Nelle ipotesi del Teorema 2.63, f è limitata su I, ossia, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in I$.*

Dimostrazione Poiché f è continua in b, esiste $b_1 \in (a,b)$ tale che $|f(x) - f(b)| < 1$ per ogni $b_1 < x \le b$ e quindi

$$|f(x)| = |f(x) - f(b) + f(b)| \le |f(x) - f(b)| + |f(b)| < 1 + |f(b)| =: C_1\,, \quad \forall\, b_1 < x \le b\,.$$

Sia, ora,

$$E := \{y \in I \big| \, \exists\, C > 0 \text{ per cui } |f(x)| \le C\,, \forall\, a \le x \le y\}\,.$$

Chiaramente $a \in E$ e $E \subseteq I$; quindi E è un insieme limitato e non vuoto. Sia $c = \sup E \le b$. Assumiamo (per assurdo) che $c < b$. Poiché f è continua in c esiste $0 < \delta < b - c$ tale che $|f(x) - f(c)| < 1$ se $|x - c| < \delta$ e $x \in I$ e (come sopra) $|f(x)| < 1 + |f(c)|$ per ogni $c \le x \le c + \delta$; ma allora f sarebbe limitata su $[a, c + \delta]$ il che contraddice il fatto che c è un maggiorante di E. Dunque $c = b$. Dalla definizione di estremo superiore, segue che, se fissiamo $b_1 < b_2 < b$, f è limitata su $[a, b_2]$, ossia, esiste $C_2 > 0$ tale che $|f(x)| \le C_2$ per ogni $a \le x \le b_2$. La tesi segue prendendo $M = \max\{C_1, C_2\}$. ∎

Dimostrazione (del Teorema 2.63) Dimostriamo prima che f ha massimo su I.
Sia $M = \sup\{f(x) \big| \, x \in I\}$. Dal Lemma 2.64 segue che $M < +\infty$. Supponiamo (per assurdo) che f non assuma massimo in I, ossia che $f(x) < M$ per ogni $x \in I$. In tal caso la funzione $F(x) = (M - f(x))^{-1}$ è una funzione continua su I e dunque, per il Lemma 2.64 (applicato a F) F è limitata su I. D'altra parte, dalla definizione di estremo superiore segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in I$ tale che $M - \varepsilon < f(x)$, il che equivale a $F(x) > 1/\varepsilon$; ma questo, essendo ε

[35] Esercizio **2.44**.
[36] Nel Capitolo 6 estenderemo il teorema a insiemi compatti; per maggiori informazioni vedi `https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem`.