

Criterio di condensazione di Cauchy

Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente di numeri positivi. Allora, $\sum a_n \approx \sum 2^n a_{2^n}$. Infatti¹⁹:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \quad (5.11)$$

Dimostrazione Poiché a_k è decrescente si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2^n} a_k &= a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + \underbrace{(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})}_{2^{n-1} \text{ termini}} \\ &\geq a_2 + 2a_4 + 2^2 a_{2^3} + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2^{n+1}-1} a_k &= (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + \underbrace{(a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1})}_{2^n \text{ termini}} \\ &\leq 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^n a_{2^n} = \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=2}^{2^n} a_k \leq \sum_{k=2}^{2^{n+1}-1} a_k \leq \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}$$

da cui, prendendo il limite per $n \rightarrow +\infty$, si ottiene la (5.11). ■

Esempio 5.12 La funzione di Riemann $\zeta(s)$ converge (per s reali) se e solo se²⁰ $s > 1$. Questo fatto deriva immediatamente dal criterio di condensazione, essendo per²¹ $s > 0$, $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \sum \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n$, e quest'ultima è una serie geometrica di ragione $1/2^{s-1}$ che è strettamente minore di 1 se e solo se $s > 1$. In particolare, se $s > 1$, da (5.11) segue che

$$\zeta(s) < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}, \quad (s > 1). \quad (5.12)$$

Esempio 5.13 Sia $\alpha > 0$ e $a_n = \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ per $n \geq 2$. Vogliamo studiare la convergenza della serie $\sum a_n$. Si noti che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ e quindi i criteri di radice (e rapporto) non danno informazioni. Poiché $a_n \searrow 0$, possiamo applicare il criterio di condensazione di Cauchy. In vista dell'Esempio 5.12, otteniamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1.$$

Quindi la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

¹⁹Le disuguaglianze vanno intese in $\mathbb{R}^*$.

²⁰Cfr. Esercizio 5.5.

²¹Per $s \leq 0$ i termini della serie non tendono a 0 e quindi la serie diverge.