

Esercizio 2.34 (La frazione continua della [sezione aurea](#)) Sia $a_1 = 1$ e, per $n \geq 2$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$. Si noti che $a_n = f(a_{n-1})$ con f strettamente decrescente e che, dunque, $F := f \circ f$ è strettamente crescente.

(i) Si determinino relazioni ricorsive per le successioni $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n-1}\}$ e si dimostri che $\{a_{2n-1}\}$ è una successione strettamente crescente, $\{a_{2n}\}$ una successione strettamente decrescente e che $a_{2n-1} < a_{2n}$ per ogni n .

(ii) Si calcolino i limiti di $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n-1}\}$ e se ne deduca che $\lim a_n = (\sqrt{5} + 1)/2$ (tale numero viene chiamato **sezione aurea**).

Esercizio 2.35 Sia $a_1 = 3$ e, per $n \geq 2$, $a_n = \left(a_{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)^2 + \frac{1}{n}$. Dimostrare che $a_n = 2^{2^{n-1}} + 1/n$ (che, quindi, tende a $+\infty$ molto rapidamente).

Esercizio 2.36 Dato $\alpha > 0$, studiare il limite della successione $a_1 = \alpha$ e, per $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$.

Esercizio 2.37 Studiare il limite della successione $a_1 = 1$ e, per $n \geq 2$, $a_n = 1/(2 + a_{n-1})$.

Esercizio 2.38 Trovare un insieme E non vuoto con $\sup E \notin \mathcal{D}^*E$ e tale che non esista alcuna successione in E strettamente crescente che converga a $\sup E$.

Esercizio 2.39 Sia $a_n = \{\frac{3}{4}n\}$ (dove $\{\cdot\}$ denota la parte frazionaria). Dimostrare che non esiste $\lim a_n$.

[Suggerimento: Usare l'Osservazione [2.49](#)–(i).]

5 Continuità

In questa sezione si introduce la fondamentale nozione di continuità (che verrà poi ripresa nel Capitolo [6](#)) e se ne discutono le principali proprietà elementari.

Definizione 2.50 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che f è **continua in x_0** se²⁶

$$x_0 \in \mathcal{I}(A) \quad \text{oppure} \quad x_0 \in \mathcal{D}A \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.23)$$

Se f è continua in ogni punto di A si dice che f è **continua su A** .

L'insieme di tutte le funzioni continue su A si denota con $C(A)$.

Osservazione 2.51 (i) La [\(2.23\)](#) è equivalente a²⁷:

$$\forall V \text{ intorno di } f(x_0) \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } f(x) \in V, \quad \forall x \in U \cap A. \quad (2.24)$$

Inoltre, poiché i valori x_0 e $f(x_0)$ sono numeri reali gli intorno possono essere presi intervalli simmetrici. Quindi la [\(2.24\)](#) è a sua volta equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \text{ con } |x - x_0| < \delta. \quad (2.25)$$

(ii) Poiché $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$ (disuguaglianza triangolare), da [\(2.25\)](#) segue che la funzione $x \rightarrow |x|$ è continua su $\mathbb{R}$.

(iii) Dal teorema di permanenza del segno (Teorema [2.16](#)) segue immediatamente:

Teorema 2.52 (Permanenza del segno per funzioni continue)

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$, allora, vicino a x_0 , f ha lo stesso segno di $f(x_0)$.

²⁶Si ricordi che ogni elemento di $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, o è isolato ($x_0 \in \mathcal{I}(A)$) oppure è d'accumulazione ($x_0 \in \mathcal{D}A$).

²⁷Si notino le differenze con la definizione generale di limite: x_0 è un punto di A , il valore del limite è $f(x_0)$, non bisogna escludere x_0 nei valori in $U \cap A$.

(iv) Dall'algebra dei limiti segue immediatamente che se f e g sono continue su x_0 allora $f+g$ e fg sono continue in x_0 e se²⁸ $g(x_0) \neq 0$, f/g è continua in x_0 .
In particolare, $x^\pm$ sono continue su²⁹ $\mathbb{R}$ e

i polinomi sono funzioni continue su $\mathbb{R}$; le funzioni razionali sono funzioni continue sul loro dominio di definizione.

(v) Dalla Proposizione 2.32 (nell'ipotesi (i)) segue che la composizione di funzioni continue è continua, o, più precisamente,

Se $f : A \rightarrow B$ è continua in $x_0 \in A$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $y_0 = f(x_0) \in B$, allora $g \circ f$ è continua in x_0 .

In particolare, se f e g sono continue in x_0 lo sono anche³⁰ $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$.

Anche le potenze con esponente razionale sono funzioni continue:

Proposizione 2.53 (Continuità delle radici) *Se $r \in \mathbb{Q}_+$ e $x_0 \geq 0$, allora la funzione $x \in [0, +\infty) \mapsto x^r$ è continua in x_0 .*

Dimostrazione Distinguiamo i casi $x_0 = 0$ e $x_0 > 0$. Sia $x_0 = 0$ e sia $\varepsilon > 0$. Allora, se $x \geq 0$, si ha che $x^r < \varepsilon$ se e solo se $x < \varepsilon^{1/r}$ e dunque, se $\delta := \varepsilon^{1/r} > 0$, si ha che $|x^r| = x^r < \varepsilon$ per ogni $0 \leq x < \delta$, ossia, $\lim_{x \rightarrow 0} x^r = 0$.

Sia, ora, $x_0 > 0$. Essendo $x^r/x_0^r = (x/x_0)^r$ si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} x^r = x_0^r$ è equivalente (per l'algebra dei limiti) a $\lim_{y \rightarrow 1} y^r = 1$. Sia $0 < \varepsilon < 1$ e poniamo $s = r^{-1} \in \mathbb{Q}_+$. Allora, $1 - \varepsilon < y^r < 1 + \varepsilon \iff (1 - \varepsilon)^s < y < (1 + \varepsilon)^s \iff y \in ((1 - \varepsilon)^s, (1 + \varepsilon)^s)$ (che è un intorno di 1). ■

Se f non è continua in x_0 si ha una delle alternative descritte nella seguente

Definizione 2.54 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}A$.*

- (i) f ha una **discontinuità eliminabile** in $x_0 \in A$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L \in \mathbb{R}$ e $L \neq f(x_0)$.
- (ii) f ha una **discontinuità di salto** (o “un salto”) in x_0 se esistono (finiti) i limiti laterali in x_0 e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.
- (iii) f ha una **discontinuità essenziale** in x_0 se uno dei limiti laterali non esiste (finito).

Ad esempio, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)^2$ ha una discontinuità eliminabile in 0; $x \mapsto [x]$ ha un salto in ogni $x_0 = n \in \mathbb{Z}$; $1/x$ ha una discontinuità essenziale in $x = 0$; $\chi_{\mathbb{Q}}$ ha una discontinuità essenziale in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Osservazione 2.55 (i) Si noti che in questa definizione, nei casi (ii) e (iii), x_0 può non appartenere al dominio di f .

Nel caso (i) di discontinuità eliminabile, se il valore di $f(x_0)$ viene sostituito con L la funzione f diventa continua in x_0 ; invece, nei casi (ii) e (iii) non esiste alcun $L \in \mathbb{R}$ tale che definendo $f(x_0) = L$ [o sostituendo il valore di f in x_0 con L] la funzione f sia continua in x_0 .

(ii) Chiaramente, poiché i limiti laterali delle funzioni monotone esistono sempre

*Le funzioni monotone possono avere solo discontinuità di salto sui punti del loro dominio*³¹.

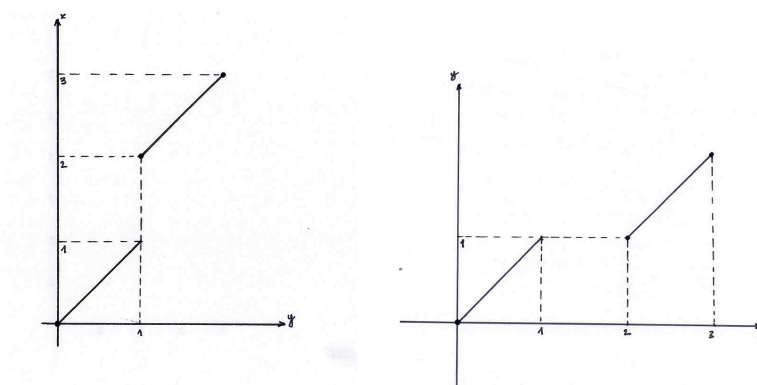


Figura 2.2: L'inversa di una funzione monotona su un intervallo è continua

Da questa semplice osservazione deriva il seguente notevole

Teorema 2.56 *Sia I un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Allora la funzione inversa $f^{-1} : \text{im}(f) \rightarrow I$ è continua.*

Dimostrazione La funzione inversa f^{-1} è anch'essa strettamente monotona e quindi, per l'Osservazione 2.55–(ii) può avere solo discontinuità di salto su punti del suo dominio, il che però non è possibile essendo $f^{-1}(\text{im}(f)) = I$ un intervallo³². ■

Zeri e valori intermedi

Il seguente è forse il risultato più importante sulle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Teorema 2.57 (Esistenza degli zeri di funzioni continue) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora f ha una zero tra a e b , ossia, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione Chiaramente, basta considerare il caso $f(a) > 0 > f(b)$ (altrimenti si consideri $-f$ al posto di f).

Definiamo ricorsivamente due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ come segue:

$a_1 := a$, $b_1 := b$ e se $n \geq 1$ definiamo $c_n := (a_n + b_n)/2$ e

$$\text{se } f(c_n) > 0, \text{ allora } \begin{cases} a_{n+1} := c_n \\ b_{n+1} := b_n \end{cases} \quad (\text{i})$$

$$\text{se } f(c_n) < 0, \text{ allora } \begin{cases} a_{n+1} := a_n \\ b_{n+1} := c_n \end{cases} \quad (\text{ii})$$

$$\text{se } f(c_n) = 0, \text{ allora } a_{n+1} := b_{n+1} := c_n. \quad (\text{iii})$$

²⁸ $g \neq 0$ vicino a x_0 per l'osservazione precedente.

²⁹Essendo $x^\pm = \frac{|x| \pm x}{2}$ (Definizione 1.19).

³⁰ $\max\{f, g\} = f + (g - f)^+$ e $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$.

³¹Ma ad esempio, $x \in (0, +\infty) \mapsto 1/x$ ha una discontinuità essenziale in $x_0 = 0$.

³²Esercizio 2.40.

Ci sono due casi: o esiste $n \geq 2$ tale che $f(c_n) = 0$ oppure $f(c_n) \neq 0$ per ogni n . Nel primo caso, poniamo $x_0 = c_n$ e il teorema è dimostrato.

Nel secondo caso, si ha che $\{a_n\}$ è crescente e $\{b_n\}$ è decrescente; inoltre, per ogni n , si ha $f(a_n) > 0 > f(b_n)$ e

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^n} \quad (2.26)$$

(la seconda uguaglianza segue immediatamente per induzione). In particolare $a_n < b_n$ per ogni n e quindi $a_n < b_m$ per ogni n ed m . Dal teorema sull'esistenza dei limiti per successioni monotone e dal teorema del confronto segue che

$$\lim a_n = \sup a_n =: \alpha \leq \beta := \inf b_n = \lim b_n. \quad (2.27)$$

Ma allora

$$\beta - \alpha = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) \stackrel{(2.26)}{=} \lim \frac{b - a}{2^{n-1}} = 0.$$

Poniamo ora $x_0 = \alpha = \beta$. Per continuità si ha che $f(x_0) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$. Ma poiché $f(a_n) \geq 0$ si deve avere (teorema del confronto) $f(x_0) \geq 0$ e poiché $f(b_n) \leq 0$ si deve avere $f(x_0) \leq 0$ il che implica che $f(x_0) = 0$. ■

Osservazione 2.58 Dalle ipotesi del teorema nulla si può dire del numero di zeri tra a e b : ad esempio se $a = -2$, $b = 2$ e $f(x) := x$, si ha un solo zero $x_0 = 0$; mentre se $f(x) := (x + 1)$ per $-2 \leq x \leq -1$, $f(x) := 0$ per $-1 \leq x \leq 1$ e $f(x) := (x - 1)$ per $1 \leq x \leq 2$, tutti i punti in $[-1, 1]$ sono zeri per f .

In ogni caso, esiste sempre un (unico) “primo zero” di f , ossia un unico $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$ e tale che $f(x) \cdot f(a) > 0$ per ogni $x \in [a, x_0)$.

Infatti, sia $E := \{\bar{x} \in (a, b) \mid f(\bar{x}) = 0\}$. Per il Teorema 2.57, $E \neq \emptyset$ (e per definizione $E \subseteq (a, b)$ ed è quindi limitato). Sia $x_0 = \inf E \geq a$. Dalla caratterizzazione per successioni dell'estremo inferiore segue che esiste una successione $x_n \in E$ tale che $x_n \rightarrow x_0$ e per continuità si ha che $f(x_0) = \lim f(x_n)$, ma essendo $f(x_n) = 0$ per ogni n segue che $f(x_0) = 0$, ossia $x_0 \in E$ è il minimo di E . In particolare $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, x_0)$, ma allora $f(x)$ deve avere lo stesso segno di $f(a)$ (altrimenti per il Teorema 2.57 si avrebbe uno zero tra a e $x < x_0$ contraddicendo la minimalità di x_0). ■

Vediamo alcune conseguenze immediate del Teorema dell'esistenza degli zeri.

Corollario 2.59 (Teorema dei valori intermedi) Sia I un intervallo e $f \in C(I)$. Allora f assume tutti i valori tra due valori dati $y_i = f(x_i)$, $x_i \in I$.

Dimostrazione Assumiamo, senza perdita di generalità, che $x_1 < x_2$, e sia $\bar{y}_1 = \min\{y_1, y_2\}$, $\bar{y}_2 = \max\{y_1, y_2\}$. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\bar{y} \in [\bar{y}_1, \bar{y}_2]$, esiste $\bar{x} \in [x_1, x_2]$ tale che $\bar{y} = f(\bar{x})$. Se $\bar{y} = y_i$, prendiamo $\bar{x} = x_i$. Supponiamo ora che $\bar{y} \neq y_i$, ossia che $\bar{y}_1 < \bar{y} < \bar{y}_2$. Poniamo $F(x) := f(x) - \bar{y}$. Allora $F \in C([x_1, x_2])$ e $F(x_1) \cdot F(x_2) < 0$ e l'asserto segue dal Teorema di esistenza degli zeri. ■

Corollario 2.60 Sia f una funzione continua su un intervallo I . Allora,

- (i) $f(I)$ è un intervallo.
- (ii) f assume tutti i valori compresi (strettamente) tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.

Dimostrazione (i) segue immediatamente dal Teorema dei valori intermedi e dalla definizione di intervallo.

(ii) : Dalla caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$ segue che se $\inf_I f < \bar{y} < \sup_I f$, esistono due punti

³³Se $n < m$, allora $a_n \leq a_m < b_m$ e se $n > m$, allora $a_n < b_n \leq b_m$.

³⁴Se $\bar{y}_i = y_i$, $F(x_1) < 0 < F(x_2)$; se $\bar{y}_1 = y_2$ e $\bar{y}_2 = y_1$, allora $F(x_1) > 0 > F(x_2)$.

$\bar{x}_i \in I$ tali che $\inf_I f \leq f(\bar{x}_1) < \bar{y} < f(\bar{x}_2) \leq \sup_I f$ e l'asserto segue dal Teorema dei valori intermedi. ■

Infine, mettendo assieme il Teorema 2.56 e il Corollario 2.60–(i) si ha

Corollario 2.61 *Sia I un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e continua. Allora, la funzione inversa di f , f^{-1} , è una funzione continua, strettamente monotona definita sull'intervallo $J = f(I)$ e con immagine I .*

Osservazione 2.62 Vale la pena osservare che dal Teorema dei valori intermedi segue anche che su intervalli, le funzioni strettamente monotone e le funzioni iniettive coincidono; in particolare³⁵,

Una funzione continua e iniettiva su un intervallo I è strettamente monotona.

Quindi, nell'enunciato del Corollario 2.61, “strettamente monotona” può essere sostituito da “iniettiva”.

Il Teorema di Weierstrass su intervalli

Mentre il Teorema dell'esistenza degli zeri è intimamente legato all'ordine totale di $\mathbb{R}$, il seguente importante risultato di “ottimizzazione” dovuto originalmente a Weierstrass ammette notevoli generalizzazioni a spazi non totalmente ordinati³⁶.

Teorema 2.63 *Sia $I = [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ con $-\infty < a < b < \infty$ e $f \in C(I)$. Allora f assume massimo [e minimo] su I , ossia esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ [rispettivamente, $f(x_0) \leq f(x)$], per ogni $x \in I$.*

Nella dimostrazione useremo il seguente lemma interessante di per sé:

Lemma 2.64 *Nelle ipotesi del Teorema 2.63, f è limitata su I , ossia, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$.*

Dimostrazione Poiché f è continua in b , esiste $b_1 \in (a, b)$ tale che $|f(x) - f(b)| < 1$ per ogni $b_1 < x \leq b$ e quindi

$$|f(x)| = |f(x) - f(b) + f(b)| \leq |f(x) - f(b)| + |f(b)| < 1 + |f(b)| =: C_1, \quad \forall b_1 < x \leq b.$$

Sia, ora,

$$E := \{y \in I \mid \exists C > 0 \text{ per cui } |f(x)| \leq C, \forall a \leq x \leq y\}.$$

Chiaramente $a \in E$ e $E \subseteq I$; quindi E è un insieme limitato e non vuoto. Sia $c = \sup E \leq b$. Assumiamo (per assurdo) che $c < b$. Poiché f è continua in c esiste $0 < \delta < b - c$ tale che $|f(x) - f(c)| < 1$ se $|x - c| < \delta$ e $x \in I$ e (come sopra) $|f(x)| < 1 + |f(c)|$ per ogni $c \leq x \leq c + \delta$; ma allora f sarebbe limitata su $[a, c + \delta]$ il che contraddice il fatto che c è un maggiorante di E . Dunque $c = b$. Dalla definizione di estremo superiore, segue che, se fissiamo $b_1 < b_2 < b$, f è limitata su $[a, b_2]$, ossia, esiste $C_2 > 0$ tale che $|f(x)| \leq C_2$ per ogni $a \leq x \leq b_2$. La tesi segue prendendo $M = \max\{C_1, C_2\}$. ■

Dimostrazione (del Teorema 2.63) Dimostriamo prima che f ha massimo su I .

Sia $M = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$. Dal Lemma 2.64 segue che $M < +\infty$. Supponiamo (per assurdo) che f non assuma massimo in I , ossia che $f(x) < M$ per ogni $x \in I$. In tal caso la funzione $F(x) = (M - f(x))^{-1}$ è una funzione continua su I e dunque, per il Lemma 2.64 (applicato a F) F è limitata su I . D'altra parte, dalla definizione di estremo superiore segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in I$ tale che $M - \varepsilon < f(x)$, il che equivale a $F(x) > 1/\varepsilon$; ma questo, essendo ε

³⁵Esercizio 2.44.

³⁶Nel Capitolo 6 estenderemo il teorema a insiemi compatti; per maggiori informazioni vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem.

arbitrario, vuol dire che f non è limitata superiormente su I , il che contraddice il Lemma 2.64 (applicato a F). Dunque deve esistere x_0 tale che $f(x_0) = M$.

Applicando quanto dimostrato alla funzione continua $-f$, si ha che f ha anche minimo su I (che coincide col massimo di $-f$). ■

Esercizi

Esercizio 2.40 Dimostrare che se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona ed ha una discontinuità di salto in x_0 , allora $\text{im}(f)$ non può essere un intervallo.

Esercizio 2.41 Usare il teorema dei valori intermedi per dare una semplice dimostrazione alternativa del Teorema 1.84 sull'esistenza delle radici ennesime di numeri positivi.

Esercizio 2.42 Dimostrare:

- (i) $x \in \mathbb{R} \mapsto \text{sgn}^2(x)$ ha una discontinuità eliminabile in 0.
- (ii) $x \in \mathbb{R} \mapsto [x]$ e $x \in \mathbb{R} \mapsto \{x\}$ hanno una discontinuità di salto in n per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
- (iii) $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto 1/x$ ha una discontinuità essenziale in 0; $\chi_{\mathbb{Q}}$ ha una discontinuità essenziale in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.43* Dimostrare che le funzioni monotone hanno al più una quantità numerabile di discontinuità.

[Suggerimento: Si consideri prima il caso di una funzione crescente e limitata su A e si dimostri che $\#\{x \in A : f(x+) - f(x-) > 1/n\} < +\infty$ per ogni n e dedurre che $\#\{x \in A : f(x+) - f(x-) > 0\} < +\infty$ è al più numerabile.]

Esercizio 2.44* (i) Si dice che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **conserva l'ordine ciclico** se comunque presi $x_1 < x_2 < x_3$ in A e detti $y_i = f(x_i)$, si ha o $y_1 \leq y_2 \leq y_3$, oppure $y_3 \leq y_2 \leq y_1$. Dimostrare che $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ conserva l'ordine ciclico se e solo se f è monotona.

(ii) Dimostrare che una funzione continua e iniettiva su un intervallo I è strettamente monotona.

6 Esponenziali e Logaritmi

Come applicazione (importante) di questo capitolo introduttivo alla teoria dei limiti, discutiamo due fondamentali classi di funzioni: le funzioni esponenziali e le loro inverse, ossia, le funzioni logaritmiche.

Le funzioni esponenziali

Fissiamo una “base” $a > 1$ e consideriamo la funzione³⁷

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto f(x) := a^x \in (0, +\infty), \quad (a > 1).$$

Essendo $a > 1$, f è strettamente crescente³⁸ e dunque esistono i limiti laterali $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x)$ per ogni $x_0 \in \mathcal{D}^*\mathbb{Q} = \mathbb{R}^*$; inoltre per $a > 1$ e $m \in \mathbb{Z}$ si ha³⁹

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{Q}}} \frac{a^x}{x^m} = +\infty, \quad (m \in \mathbb{Z}, a > 1). \quad (2.28)$$

Infatti, i limiti laterali di f coincidono:

Lemma Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup_{\substack{x < x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} a^x = \inf_{\substack{x > x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} a^x$.

³⁷Si ricordi la Proposizione 1.93.

³⁸Eq. (1.73).

³⁹Segue da $\frac{a^x}{x^n} \geq \frac{a^{[x]}}{([x]+1)^n}$, dal limite notevole $a^n/n^p \rightarrow +\infty$ (Proposizione 2.40-(i)), e dal teorema sulla composizione dei limiti (Proposizione 2.32).