Esercizi

5.1 Sia $\{a_n\}$ una successione e si assuma che $a_{2n} \to L$ e $a_{2n-1} \to L$ con $L \in \mathbb{R}^*$. Dimostrare che $a_n \to L$.

5.2 Siano $0 \le a_k \le b_k$ e supponiamo che la serie $\sum b_k$ converga. Dimostrare che se, per un dato n, $a_n < b_n$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Esercizio 5.3 Usando il Lemma 2.41, si dimostrino (per induzione) le due disuguaglianze in (5.6).

Esercizio 5.4 Dimostrare che se $m \in \mathbb{Z}$ e $|x| < 1$, allora

$$\sum_{k=m}^{\infty} x^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} x^k = \frac{x^m}{1-x}\,, \qquad |x|<1\,,\ m\in\mathbb{Z}, \quad (x \neq 0 \text{ se } m<0)\,.$$

Esercizio 5.5 (i) Si dimostri che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{n}$.

(ii) Si dimostri che, per ogni m, $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n} \ge 1/2$ e se ne deduca la divergenza della serie armonica.

(iii) Si dimostri che $\zeta(s) = +\infty$ se $s \le 1$ e che $\zeta(s) < +\infty$ se $s \ge 2$.

Esercizio 5.6 ($\zeta(s)$ per $s \in (1,2)$)
(i) Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{n(n+1)^\varepsilon} \sim \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\Big)$.

Suggerimento: $\displaystyle\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\Big) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\big(1+\frac{1}{n}\big)^\varepsilon - 1}{(n+1)^\varepsilon}$

(ii) Dimostrare che per $s \in (0,1)$, $\zeta(s) = +\infty$. In conclusione, *per* $s \in \mathbb{R}$, $\zeta)s) < +\infty \iff s > 1$.

Esercizio 5.7 (Costante di Eulero–Mascheroni) Sia $\gamma_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. Da (5.6) segue che $\gamma_n \in (0,1]$ per ogni n. Si dimostri quanto segue:

(i) γ_n è strettamente decrescente e dunque esiste $\gamma := \lim \gamma_n = \inf \gamma_n \in [0,1]$ ed in particolare $\gamma < \gamma_2 = \frac{3}{2} - \log 2 = 0,8\ldots$.

(ii) Per ogni $n \ge 2$, $\log n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \log\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)$.

Suggerimento: $\log\Big(1+\dfrac{1}{k}\Big) = \log(k+1) - \log k$.

(ii) Per ogni $n \ge 2$, si ha $\gamma_n = \dfrac{1}{n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-\log e_k}{k}$, dove $e_k = \big(1+\frac{1}{k}\big)^k$. Dedurne che

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\log e_k}{k}\,.$$

ed in particolare che $\gamma > 1 - \log 2 > 0,3$.

Il numero γ è noto come la *costante di Eulero–Mascheroni* ed il suo valore numerico è $\gamma = 0.57721566490153286060\ldots$; non è noto se γ sia un numero razionale o irrazionale[8].

[8] Cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_constant.