3 Funzioni trigonometriche

A questo punto abbiamo tutti gli elementi che permettono una discussione analitica completa (ossia, basata esclusivamente sugli assiomi dei numeri reali) delle funzioni trigonometriche, che ha però il vantaggio – rispetto ad altre trattazioni analitiche basate, ad esempio, sulla teoria delle serie[15] o su quella delle equazioni differenziali – di riallacciarsi direttamente al classico punto di vista geometrico ("cerchio trigonometrico", angoli in radianti[16], etc).

Archi di cerchi e loro misura

Sia $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big|\ x^2+y^2=1\}$ *la circonferenza di raggio 1 in* $\mathbb{R}^2$ *centrata nell'origine* e sia S^1_+ la parte di S^1 nel quadrante positivo $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$:

$$S^1_+ := S^1 \cap [0,+\infty)\times[0,+\infty) = \big\{\big(x,g(x)\big)\big| \, 0\le x\le 1\big\}\,, \quad g(x) := \sqrt{1-x^2}\ . \tag{3.28}$$

Si noti che la funzione g è decrescente su $[0,1]$.

Fissiamo due punti $z=(x,y)$ e $z'=(x',y')$ su S^1_+. Vogliamo definire la lunghezza dell'*arco di circonferenza in* S^1_+ *di estremi* z *e* z', ossia, assumendo (senza perdita di generalità) che $0\le x\le x'\le 1$, dell'insieme definito da

$$S^1_{x,x'} := \big\{\big(\xi, g(\xi)\big) \in S^1_+ \big|\, x\le \xi \le x'\big\}\,.$$

Per fare questo definiamo prima la lunghezza (euclidea) dei segmenti e delle poligonali in $\mathbb{R}^2$.

Un *segmento di estremi* $z_1=(x_1,x_1)$ *e* $z_2 := (x_2,y_2)$ è, per definizione la porzione della retta passante per z_1 e z_2 "limitata" da z_1 e z_2, ossia, l'insieme[17]

$$\sigma(z_1,z_2) = \{z(t) = z_1 + t(z_2-z_1) \in \mathbb{R}^2 \big|\, 0\le t\le 1\}\ . \tag{3.29}$$

Se z_1, z_2,...,z_n sono $n\ge 2$ punti di $\mathbb{R}^2$ tali che, se $i\neq j$, $\sigma(z_i,z_{i+1})\cap\sigma(z_j,z_{j+1})$ contiene al più un punto, *la poligonale di vertici* z_1, z_2, ..., z_n è, per definizione, l'insieme[18]

$$P(z_1,z_2,...,z_n) := \sigma(z_1,z_2)\cup\cdots\cup\sigma(z_{n-1},z_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1}\sigma(z_i,z_{i+1})\,. \tag{3.30}$$

Definiamo*la lunghezza (euclidea) di un segmento* $\sigma(z_1,z_2)$ come il numero non negativo

$$\ell\big(\sigma(z_1,z_2)\big) := \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y-y_2)^2}\ , \tag{3.31}$$

e *la lunghezza della poligonale* $P = P(z_1,z_2,...,z_n)$ come il numero non negativo

$$\ell(P) = \ell\big(P(z_1,z_2,...,z_n)\big) = \sum_{i=1}^{n-1}\ell\big(\sigma(z_i,z_{i+1})\big)\ . \tag{3.32}$$

Dati $0\le x\le x'\le 1$, diremo che *la poligonale* $P=P(z_1,z_2,...,z_n)$ è *inscritta nell'arco di circonferenza* $S^1_{x,x'}$ se $z_i = \big(x_i, g(x_i)\big)$ con $x_1 := x \le x_2 \le \cdots \le x_n := x'$ e $y_i = g(x_i)$; denotiamo $\mathcal{P}_{x,x'}$ la famiglia di tutte le poligonali inscritte in $S^1_{x,x'}$ e si noti che tale famiglia è sempre non vuota poiché $\sigma(z_1,z_2) = P(z_1,z_2)\in\mathcal{P}_{x,x'}$.

[15] Cfr. *L. Chierchia, Corso di Analisi, prima parte. MacGraw 2019, cap. 5*.

[16] Per una discussione su questi temi, vedi `https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_trigonometrica`.

[17] Se $z_i=(x_i,y_i)$, $z_1+t(z_2-z_1) = (x_1+t(x_2-x_1), y_1+t(y_2-y_1))$; nel caso $z_1=z_2$ il segmento $\sigma(z_1,z_2)$ *degenera* nel punto $\{z_1\}$.

[18] Si noti che, mentre nella definizione di segmento l'ordine degli estremi non conta, la definizione di poligonale *per* $n\ge 3$ *dipende dall'ordine della ennupla* $(z_1,...,z_n)$; si noti anche che queste sono poligonali senza "autointersezioni".

Definizione 3.26 *Dati $0 \leq x \leq x' \leq 1$, la lunghezza $\ell(S^1_{x,x'})$ dell'arco $S^1_{x,x'}$ è definito come l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte in $S^1_{x,x'}$, in formule:*

$$\ell(S^1_{x,x'}) := \sup\{\ell(P) \big| \, P \in \mathscr{P}_{x,x'}\} \ . \tag{3.33}$$

Poniamo anche $S^1_x := S^1_{x,1}$.

Per verificare la buona posizione di questa definizione si deve avere che[19] $\{\ell(P) \big| \, P \in \mathscr{P}_{x,x'}\}$ sia un insieme limitato superiormente. Poiché $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$ si ha che, per ogni poligonale $P(z_1, z_2, ..., z_n)$, $z_j = (x_j, y_j)$, inscritta nell'arco di circonferenza $S^1_{x,x'}$ si ha[20]

$$\begin{aligned} \ell(P) &= \sum_{i=1}^{n-1} \ell\big(\sigma(z_i, z_{i+1})\big) \leq \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_{i+1}) \\ &= (x_n - x_1) + (y_1 - y_n) = (x' - x) + \big(g(x) - g(x')\big) \leq 2 \ , \qquad \forall \ P \in \mathscr{P}_{x,x'} \ , \end{aligned} \tag{3.34}$$

il che mostra che $\{\ell(P) \big| \, P \in \mathscr{P}_{x,x'}\}$ è limitato e dunque la definizione ben posta.

Osservazione 3.27 Chiaramente[21]: (i) $\ell(S^1_{x,x'}) = 0$ se e solo se $x = x'$;

(ii) se $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$, $\ell(S^1_{x_1,x_3}) = \ell(S^1_{x_1,x_2}) + \ell(S^1_{x_2,x_3})$.

(iii) $\ell(S^1_{x,x'}) \geq \ell\Big(\sigma\big((x, g(x)), (x', g(x'))\big)\Big) = \min\{\ell(P) \big| \, P \in \mathscr{P}_{x,x'}\}$.

[19] Ovviamente tale insieme di numeri non negativi è non vuoto essendo non vuota la famiglia $\mathscr{P}_{x,x'}$.
[20] Si noti che dalla definizione di poligonale inscritta segue che $x_i \leq x_{i+1}$ mentre $y_i = g(x_i) \geq g(x_{i+1}) = y_{i+1}$.
[21] Esercizio **3.10**.