π e l'arcocoseno

Seguendo la tradizione, chiameremo $\pi/2$ la lunghezza di $S^1_+ = S^1_{0,1}$:

Definizione 3.28 (pi greco) $\pi := 2\ell(S^1_0)$

Definizione 3.29 *Per $x \in [0,1]$, poniamo $A(x) := \ell(S^1_x)$; tale funzione è anche chiamata il ramo principale dell'arcocoseno ristretta a $[0,1]$.*

Osservazione 3.30 Dall'Osservazione 3.27, segue immediatamente che *la funzione $x \in [0,1] \mapsto A(x) \in [0,\pi/2]$ è una funzione strettamente decrescente e tale che $A(0) = \frac{\pi}{2}$, $A(1) = 0$.*

Dimostriamo che $A(x)$ è differenziabile su $[0,1)$:

Lemma 3.31 *Per ogni $0 \le x < 1$, $A'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Dimostrazione Fissiamo $x \in [0,1)$ e calcoliamo la derivata destra $D_+ A(x)$. Sia $0 < h < 1-x$. Dall'Osservazione 3.27 segue che

$$A(x+h) - A(x) = -(A(x) - A(x+h)) = -\ell(S^1_{x,x+h})\,. \tag{3.35}$$

Ora, si noti che, se $0 \le x_1 < x_2 < 1$, $y_i = g(x_i)$ e $z_i = (x_i, y_i)$, dal Teorema di Lagrange segue

$$\ell(\sigma(z_1,z_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + \Big(\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2 - x_1}\Big)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + g'(\bar{x})^2}$$

per un opportuno $\bar{x} \in (x_1, x_2)$, e dunque

$$(x_2 - x_1)\inf_{(x_1,x_2)}\sqrt{1+g'^2} \le \ell(\sigma(z_1,z_2) \le (x_2 - x_1)\sup_{(x_1,x_2)}\sqrt{1+g'^2}\,, \quad \forall\, 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\,. \tag{3.36}$$

Sia ora $P = P(z_1, ..., z_n) \in \mathscr{P}_{x,x+h}$ una qualunque poligonale inscritta in S^1_+ di estremi x e $x+h$, ossia $z_i = (x_i, y_i) = (x_i, g(x_i))$ con $x_1 = x \le \cdots \le x_n = x+h$, e siano $\alpha(h) := \inf_{(x,x+h)}\sqrt{1+g'^2}$ e $\beta(h) := \sup_{(x,x+h)}\sqrt{1+g'^2}$. Allora, da (3.36) segue

$$\begin{aligned}
h\cdot\alpha(h) &= \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,\alpha(h) \le \sum_{i=1}^{n-1}\Big((x_{i+1}-x_i)\inf_{(x_i,x_{i+1})}\sqrt{1+g'^2}\Big)\\
&\overset{(3.36)}{\le} \sum_{i=1}^{n-1}\ell(\sigma(z_i,z_{i+1})) = \ell(P) \overset{(3.36)}{\le} \sum_{i=1}^{n-1}\Big((x_{i+1}-x_i)\sup_{(x_i,x_{i+1})}\sqrt{1+g'^2}\Big)\\
&\le \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,\beta(h) = h\cdot\beta(h)\,.
\end{aligned}$$

Dunque, per ogni poligonale $P \in \mathscr{P}_{x,x+h}$, si ha che

$$\alpha(h) \le \frac{\ell(P)}{h} \le \beta(h)\,,$$

e, prendendo l'estremo superiore su tutte le partizioni $P \in \mathscr{P}_{x,x+h}$, otteniamo

$$\alpha(h) \le \frac{\ell(S^1_{x,x+h})}{h} \le \beta(h)\,.$$

Poiché $\lim\limits_{h\to 0+}\alpha(h) = \sqrt{1+g'(x)^2} = \lim\limits_{h\to 0+}\beta(h)$, dal teorema del confronto segue anche che

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\ell(S^1_{x,x+h})}{h} = \sqrt{1+g'(x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Tale relazione, assieme alla (3.35), mostra che $D_+ A(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$.
In modo del tutto analogo si mostra che anche per la derivata sinistra si ha[23] $D_- A(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$. ∎

In particolare, A è continua su $[0,1)$ e $\lim_{x\to 1} A'(x) = +\infty$. Ma, in effetti, *$A$ è continua anche in $x = 1$*: dalla definizione di A e da (3.34) segue che, per ogni $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned} |A(x) - A(1)| &= A(x) \leq (1-x) + g(x) = (1-x) + \sqrt{(1-x)(1+x)} \\ &< (1-x) + \sqrt{(1-x)} < 2\sqrt{(1-x)}\,, \end{aligned} \tag{3.37}$$

da cui segue che $\lim\limits_{x\to 1-} A(x) = 0 = A(1)$, come annunciato[24].

In conclusione abbiamo dimostrato il seguente

Lemma 3.32 *$A : x \in [0,1] \mapsto t = A(x)$ è una funzione continua su $[0,1]$, strettamente decrescente e di classe $C^1([0,1))$ con $A'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$; infine*[25] $A[(0,1]) = [0,\pi/2]$.

[23] Esercizio **3.12**.
[24] Infatti la (3.37) mostra che $A(x)$ è *Hölder continua con esponente* $1/2$ *in* $x = 1$.
[25] Quest'ultima affermazione segue immediatamente dal teorema dei valori intermedi.