

Capitolo 1

1 Funzioni trigonometriche

A questo punto abbiamo tutti gli elementi che permettono una discussione analitica completa (ossia, basata esclusivamente sugli assiomi dei numeri reali) delle funzioni trigonometriche, che ha però il vantaggio – rispetto ad altre trattazioni analitiche basate, ad esempio, sulla teoria delle serie¹ o su quella delle equazioni differenziali – di riallacciarsi direttamente al classico punto di vista geometrico (“cerchio trigonometrico”, angoli in radianti², etc), rimanendo, però, nell’ambito dell’analisi matematica moderna ed in particolare, senza far alcun uso di risultati o argomenti tratti della geometria euclidea (che, come già detto, è altro e indipendente impianto assiomatico).

Archi di circonferenza e loro misura

Sia $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza di raggio 1 in $\mathbb{R}^2$ centrata nell’origine e sia S_+^1 la parte di S^1 nel quadrante positivo $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$:

$$S_+^1 := S^1 \cap [0, +\infty) \times [0, +\infty) = \{(x, g(x)) \mid 0 \leq x \leq 1\}, \quad g(x) := \sqrt{1 - x^2}. \quad (1)$$

Si noti che la funzione g è decrescente su $[0, 1]$.

Fissiamo due punti $z = (x, y)$ e $z' = (x', y')$ su S_+^1 . Vogliamo definire la lunghezza dell’arco di circonferenza in S_+^1 di estremi z e z' , ossia, assumendo (senza perdita di generalità) che $0 \leq x \leq x' \leq 1$, dell’insieme definito da

$$S_{x,x'}^1 := \{(\xi, g(\xi)) \in S_+^1 \mid x \leq \xi \leq x'\}.$$

Per far questo definiamo prima la lunghezza (euclidea) di³ ‘segmenti’ e di ‘poligonal’ in $\mathbb{R}^2$.

Un *segmento di estremi* $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 := (x_2, y_2)$ è, per definizione la porzione della retta passante per z_1 e z_2 ‘limitata’ da z_1 e z_2 , ossia, l’insieme⁴

$$\sigma(z_1, z_2) := \{z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1\}. \quad (2)$$

Se $z_1, z_2, \dots, z_n$ sono $n \geq 2$ punti di $\mathbb{R}^2$ tali che, se $i \neq j$, $\sigma(z_i, z_{i+1}) \cap \sigma(z_j, z_{j+1})$ contiene al più un punto, la *poligonale di vertici* $z_1, z_2, \dots, z_n$ è, per definizione, l’insieme⁵

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) := \sigma(z_1, z_2) \cup \dots \cup \sigma(z_{n-1}, z_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \sigma(z_i, z_{i+1}). \quad (3)$$

Definiamo la *lunghezza (euclidea) di un segmento* $\sigma(z_1, z_2)$ come il numero non negativo

$$\ell(\sigma(z_1, z_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (z_i = (x_i, y_i)), \quad (4)$$

e la *lunghezza della poligonale* $P = P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ come il numero non negativo

$$\ell(P) = \ell(P(z_1, z_2, \dots, z_n)) = \sum_{i=1}^{n-1} \ell(\sigma(z_i, z_{i+1})). \quad (5)$$

Dati $0 \leq x \leq x' \leq 1$, diremo che la poligonale $P = P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ è *inscritta nell’arco di circonferenza* $S_{x,x'}^1$ se $z_i = (x_i, g(x_i))$ con $x_1 := x \leq x_2 \leq \dots \leq x_n := x'$ e $y_i = g(x_i)$; denotiamo $\mathcal{P}_{x,x'}$ la famiglia di tutte le poligonal’ inscritte in $S_{x,x'}^1$. Si noti che $\mathcal{P}_{x,x'} \neq \emptyset$, poiché $\sigma(z_1, z_2) = P(z_1, z_2) \in \mathcal{P}_{x,x'}$.

¹Cfr. [L. Chierchia, Corso di Analisi, prima parte. MacGraw 2019, cap. 5.](#)

²Per una discussione su questi temi, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_trigonometrica.

³Ovviamente, la nomenclatura è ispirata alla geometria euclidea ma ogni parola ha una precisa definizione in termini degli assiomi dei numeri reali.

⁴Se $z_i = (x_i, y_i)$, $z_1 + t(z_2 - z_1) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$; nel caso $z_1 = z_2$ il segmento $\sigma(z_1, z_2)$ degenera nel punto $\{z_1\}$.

⁵Si noti che, mentre nella definizione di segmento l’ordine degli estremi non conta, la definizione di poligonale per $n \geq 3$ dipende dall’ordine della enunpla $(z_1, \dots, z_n)$; si noti anche che queste sono poligonal’ senza “autointersezioni”.

Definizione 1.1 Dati $0 \leq x \leq x' \leq 1$, la lunghezza $\ell(S_{x,x'}^1)$ dell'arco di circonferenza $S_{x,x'}^1$ è definito come l'estremo superiore delle lunghezze delle poligoni inscritte in $S_{x,x'}^1$:

$$\ell(S_{x,x'}^1) := \sup\{\ell(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,x'}\} . \quad (6)$$

Poniamo anche $S_x^1 := S_{x,1}^1$.

Per verificare la buona posizione di questa definizione si deve avere che⁶ $\{\ell(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,x'}\}$ sia un insieme limitato superiormente. Osserviamo che per ogni coppia di numeri reali a e b si ha

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| . \quad (7)$$

Dunque, presa una qualunque poligonale $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z_j = (x_j, y_j)$, inscritta nell'arco di circonferenza $S_{x,x'}^1$ si ha⁷

$$\begin{aligned} \ell(P) &= \sum_{i=1}^{n-1} \ell(\sigma(z_i, z_{i+1})) \leq \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_{i+1}) \\ &= (x_n - x_1) + (y_1 - y_n) = (x' - x) + (g(x) - g(x')) \leq 2 , \quad \forall P \in \mathcal{P}_{x,x'} . \end{aligned} \quad (8)$$

La (8) mostra che $\{\ell(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,x'}\}$ è un insieme limitato e dunque la Definizione 1.1 ben posta.

Nell'ambito della geometria euclidea è ben noto che in un triangolo la lunghezza di un lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due lati. Il corrispettivo in analisi è il punto (ii) del seguente

Lemma 1.2 (i) Siano a_i, b_i , $i = 1, 2$, numeri reali. Allora⁸

$$|a_1 a_2 + b_1 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} , \quad (9)$$

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} . \quad (10)$$

(ii) Siano $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$. Allora,

$$\ell(\sigma(z_1, z_3)) \leq \ell(\sigma(z_1, z_2)) + \ell(\sigma(z_2, z_3)) . \quad (11)$$

Dimostrazione (i) Elevando al quadrato ed eliminando i termini comuni, si vede che la (9) è equivalente a

$$2a_1 a_2 b_1 b_2 \leq a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 ,$$

relazione, a sua volta, equivalente a $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$, che è sempre verificata.

Elevando al quadrato la relazione (10), svolgendo i quadrati dei binomi e semplificando si vede che (10) è equivalente a (9).

(ii) La relazione (11) è equivalente a

$$\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} ,$$

che, ponendo $a_1 = x_1 - x_2$, $b_1 = y_1 - y_2$, $a_2 = x_2 - x_3$, $b_2 = y_2 - y_3$, diventa la (10). ■

Corollario 1.3 Sia $0 \leq x \leq x' \leq 1$. Allora,

(i) $\ell(S_{x,x'}^1) \geq \ell(\sigma((x, g(x)), (x', g(x')))) = \min\{\ell(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,x'}\}$.

(ii) $\ell(S_{x,x'}^1) = 0$ se e solo se $x = x'$;

(iii) Se $x \leq \bar{x} \leq x'$, allora $\ell(S_{x,x'}^1) = \ell(S_{x,\bar{x}}^1) + \ell(S_{\bar{x},x'}^1)$.

⁶Ovviamente tale insieme di numeri non negativi è non vuoto essendo non vuota la famiglia $\mathcal{P}_{x,x'}$.

⁷Si noti che dalla definizione di poligonale inscritta segue che $x_i \leq x_{i+1}$ mentre $y_i = g(x_i) \geq g(x_{i+1}) = y_{i+1}$.

⁸La (9) si chiama *disuguaglianza di Cauchy*; le disuguaglianze (10) e (11) si chiamano *disuguaglianze triangolari*.

Dimostrazione (i): la disuguaglianza è ovvia poiché $\sigma((x, g(x)), (x', g(x')))) \in \mathcal{P}_{x, x'}$. L'uguaglianza segue facilmente da (11) che implica che aumentando il numero dei segmenti della poligonale la lunghezza della poligonale aumenta.

(ii): Se $x = x'$, ovviamente $\ell(S_{x, x'}^1) = 0$. Se $x \neq x'$ allora (per il punto (i)), $\ell(S_{x, x'}^1) \geq \ell(\sigma((x, g(x)), (x', g(x')))) > 0$.

(iii): Se $P_1 \in \mathcal{P}_{x, \bar{x}}$ e $P_2 \in \mathcal{P}_{\bar{x}, x'}$, allora $P_3 := P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}_{x, x'}$ e dunque

$$\ell(P_1) + \ell(P_2) = \ell(P_3) \leq \ell(S_{x, x'}^1),$$

e prendendo l'estremo superiore su $P_1 \in \mathcal{P}_{x, \bar{x}}$ prima e poi l'estremo superiore su $P_2 \in \mathcal{P}_{\bar{x}, x'}$ si ha che

$$\ell(S_{x, \bar{x}}^1) + \ell(S_{\bar{x}, x'}^1) \leq \ell(S_{x, x'}^1). \quad (12)$$

Consideriamo, ora, una poligonale qualunque $P = P(z_1, \dots, z_n)$ in $\mathcal{P}(x, x')$. In generale P non contiene il punto $\hat{z} = (\bar{x}, g(\bar{x}))$, ma necessariamente esisterà un segmento di P , diciamo $\sigma = \sigma(z_j, z_{j+1})$ con $z_j = (\xi_j, g(\xi_j))$, tale che $\xi_j \leq \bar{x} \leq \xi_{j+1}$. Allora, la poligonale P' ottenuta da P sostituendo σ con $\sigma(z_j, \hat{z}) \cup \sigma(\hat{z}, z_{j+1})$ avrà (per (11)) lunghezza maggiore o uguale a quella di P ed inoltre, per costruzione P' è unione di due polignali $P_1 \in \mathcal{P}_{x, \bar{x}}$ e $P_2 \in \mathcal{P}_{\bar{x}, x'}$. Abbiamo dimostrato che, comunque presa una poligonale $P \in \mathcal{P}(x, x')$ esistono due polignali $P_1 \in \mathcal{P}_{x, \bar{x}}$ e $P_2 \in \mathcal{P}_{\bar{x}, x'}$ tali che

$$\ell(P) \leq \ell(P_1 \cup P_2) = \ell(P_1) + \ell(P_2) \leq \ell(S_{x, \bar{x}}^1) + \ell(S_{\bar{x}, x'}^1).$$

Prendendo l'estremo superiore su $P \in \mathcal{P}_{x, x'}$ si ottiene che $\ell(S_{x, x'}^1) \leq \ell(S_{x, \bar{x}}^1) + \ell(S_{\bar{x}, x'}^1)$ che assieme alla (12) implica (iii). ■

π e l'arcocoseno

Possiamo ora definire [pi greco](#):

Definizione 1.4 $\pi := 2\ell(S_0^1)$

Il numero reale π è dunque il valore in $x = 0$ della funzione $x \in [0, 1] \mapsto \ell(S_x^1)$ e coincide con la lunghezza dell'arco di circonferenza nel quadrante positivo (che per simmetria sarà pari a un quarto della lunghezza della circonferenza unitaria di “diametro” 2).

Definizione 1.5 Per $x \in [0, 1]$, poniamo $A(x) := \ell(S_x^1)$ e chiameremo tale funzione il ramo principale dell'arcocoseno ristretta a $[0, 1]$.

Osservazione 1.6 Dal Corollario 1.3, segue immediatamente che la funzione $x \in [0, 1] \mapsto A(x) \in [0, \pi/2]$ è una funzione strettamente decrescente e tale che $A(0) = \frac{\pi}{2}$, $A(1) = 0$.

Lemma 1.7 Per ogni $0 \leq x < 1$, $A'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dimostrazione Fissiamo $x \in [0, 1]$ e calcoliamo la derivata destra $D_+ A(x)$. Sia $0 < h < 1-x$. Dal Corollario 1.3 segue che

$$A(x+h) - A(x) = -(A(x) - A(x+h)) = -\ell(S_{x, x+h}^1). \quad (13)$$

Ora, si noti che, se $0 \leq x_1 < x_2 < 1$, $y_i = g(x_i)$ e $z_i = (x_i, y_i)$, dal Teorema di Lagrange segue

$$\ell(\sigma(z_1, z_2)) = (x_2 - x_1) \sqrt{1 + \left(\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right)^2} = (x_2 - x_1) \sqrt{1 + g'(\bar{x})^2}$$

per un opportuno $\bar{x} \in (x_1, x_2)$, e dunque

$$(x_2 - x_1) \inf_{(x_1, x_2)} \sqrt{1 + g'^2} \leq \ell(\sigma(z_1, z_2)) \leq (x_2 - x_1) \sup_{(x_1, x_2)} \sqrt{1 + g'^2}, \quad \forall 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1. \quad (14)$$

Sia ora $P = P(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{P}_{x, x+h}$ una qualunque poligonale inscritta in S_+^1 di estremi x e $x+h$, ossia $z_i = (x_i, y_i) = (x_i, g(x_i))$ con $x_1 = x \leq \dots \leq x_n = x+h$, e siano $\alpha(h) := \inf_{(x, x+h)} \sqrt{1 + g'^2}$ e $\beta(h) := \sup_{(x, x+h)} \sqrt{1 + g'^2}$. Allora, da (14) segue

$$\begin{aligned} h \cdot \alpha(h) &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \alpha(h) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left((x_{i+1} - x_i) \inf_{(x_i, x_{i+1})} \sqrt{1 + g'^2} \right) \\ &\stackrel{(14)}{\leq} \sum_{i=1}^{n-1} \ell(\sigma(z_i, z_{i+1})) = \ell(P) \stackrel{(14)}{\leq} \sum_{i=1}^{n-1} \left((x_{i+1} - x_i) \sup_{(x_i, x_{i+1})} \sqrt{1 + g'^2} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \beta(h) = h \cdot \beta(h). \end{aligned}$$

Dunque, per ogni poligonale $P \in \mathcal{P}_{x, x+h}$, si ha che

$$\alpha(h) \leq \frac{\ell(P)}{h} \leq \beta(h),$$

e, prendendo l'estremo superiore su tutte le partizioni $P \in \mathcal{P}_{x, x+h}$, otteniamo

$$\alpha(h) \leq \frac{\ell(S_{x, x+h}^1)}{h} \leq \beta(h).$$

Poiché $\lim_{h \rightarrow 0+} \alpha(h) = \sqrt{1 + g'(x)^2} = \lim_{h \rightarrow 0+} \beta(h)$, dal teorema del confronto segue anche che

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ell(S_{x, x+h}^1)}{h} = \sqrt{1 + g'(x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Tale relazione, assieme alla (13), mostra che $D_+ A(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$.

In modo del tutto analogo si mostra che anche per la derivata sinistra si ha⁹ $D_- A(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$. ■

In particolare, A è continua su $[0, 1]$ e $\lim_{x \rightarrow 1-0} A'(x) = -\infty$. Ma, in effetti, A è *continua anche in* $x = 1$: dalla definizione di A e da (8) segue che, per ogni $0 < x < 1$,

$$|A(x) - A(1)| = A(x) \leq (1 - x) + g(x) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad x \rightarrow 1-. \quad (15)$$

In conclusione abbiamo dimostrato il seguente

Lemma 1.8 $A : x \in [0, 1] \mapsto t = A(x)$ è una funzione continua su $[0, 1]$, strettamente decrescente con $A(0) = \pi/2$, $A(1) = 0$ e¹⁰ $A([0, 1]) = [0, \pi/2]$. Inoltre, $A \in C^1([0, 1])$ con $A'(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$.

Coseno e seno

Possiamo ora definire le funzioni trigonometriche principali ossia il coseno ed il seno.

⁹Esercizio 1.1.

¹⁰Per il teorema dei valori intermedi.

Coseno e seno su $[0, \pi/2]$

Essendo strettamente decrescente, la funzione $A : x \in [0, 1] \mapsto t = A(x) \in [0, \pi/2]$ è invertibile e la sua inversa (strettamente decrescente) prende il nome di coseno di t (ristretto a $[0, \pi/2]$):

Definizione 1.9 *La funzione inversa della funzione $A : x \in [0, 1] \mapsto t = A(x) \in [0, \pi/2]$, ossia la funzione che a $t \in [0, \pi/2]$ associa $x = \cos t := A^{-1}(t)$ ($A(x) = t$), prende il nome di coseno di t ristretta a $[0, \pi/2]$; la funzione $t \in [0, \pi/2] \mapsto \sin t := \sqrt{1 - \cos^2 t}$ prende il nome di seno di t ristretta a $[0, \pi/2]$.*

Lemma 1.10 (i) $\cos t$ e $\sin t$ sono funzioni continue su $[0, \pi/2]$; $\cos 0 = \sin \pi/2 = 1$ e $\cos \pi/2 = \sin 0 = 0$; $t \in [0, \pi/2] \mapsto \cos t$ è strettamente decrescente; $t \in [0, \pi/2] \mapsto \sin t$ è strettamente crescente e, per ogni $t \in [0, \pi/2]$, si ha

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1. \quad (16)$$

(ii) Le funzioni coseno e seno sono derivabili su $[0, \pi/2]$ e per ogni $t \in [0, \pi/2]$ si ha

$$D \cos t = -\sin t, \quad D \sin t = \cos t. \quad (17)$$

Dimostrazione (i) segue immediatamente dalla Definizione 1.9 e dal Lemma 1.8.

(ii) Dalla regola di derivazione della funzione inversa segue che, per ogni¹¹ $t \in (0, \pi/2]$

$$D \cos t = \frac{1}{A'(x)|_{x=\cos t}} = -\sqrt{1-x^2}|_{x=\cos t} = -\sin t. \quad (18)$$

Inoltre, derivando $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$ ed usando la (18) si ottiene che $D \sin t = \cos t$ per ogni $t \in (0, \pi/2]$. La derivabilità in 0 segue da un semplice corollario del teorema del valor medio di Lagrange¹² e dalla (17). ■

Coseno e seno su $[0, \pi]$

Estendiamo le funzioni coseno e seno all'intervallo $[0, \pi]$ imponendo opportune simmetrie rispetto all'asse $t = \pi/2$: per $t = \frac{\pi}{2} + s$, con $0 \leq s \leq \pi/2$, definiamo:

$$\begin{cases} \cos t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + s\right) := -\cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = -\cos(\pi - t), \\ \sin t := \sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right) := \sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \sin(\pi - t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} < t = \frac{\pi}{2} + s \leq \pi. \quad (19)$$

Chiaramente, (poiché $\cos \pi/2 = 0$) queste estensioni sono continue su $[0, \pi]$ e (come è immediato verificare) sono derivabili su $(\pi/2, \pi]$ dove vale di nuovo la (17). Ma allora, dal Corollario 1.11 segue che sono derivabili anche in $x = \pi/2$ dove si ha:

$$(D \cos t)|_{t=\pi/2} = -1, \quad (D \sin t)|_{t=\pi/2} = 0. \quad (20)$$

Dunque la (17) vale su tutto l'intervallo $[0, \pi]$.

Si noti che $\cos t$ è strettamente decrescente su $[0, \pi]$ e si annulla solamente in $\pi/2$. Il seno invece si annulla in 0 e π ed ha un massimo stretto in $\pi/2$ dove vale 1.

¹¹Il valore $t = 0$ in questo calcolo va escluso in quanto corrisponde a $x = 1$ dove la funzione $A(x)$ non è derivabile e quindi non si può applicare la regola della derivata della funzione inversa.

¹²Dal teorema di Lagrange segue subito il seguente

Corollario 1.11 *Sia $f \in C([a, b])$ derivabile su (a, b) e sia $L \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f' = L$ allora $D_+ f(a) = L$; analogamente, se $\lim_{x \rightarrow b} f' = L$ allora $D_- f(b) = L$.*

Dimostrazione Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta < b - a$ tale che $|f'(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $a < x < a + \delta$. Per tali x , per il Teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[a, x]$, esiste $0 < \bar{x} < x$, tale che $f(x) - f(a) = f'(\bar{x})(x - a)$ o, equivalentemente, $f(x) - f(a) = f'(\bar{x})(a - x)$ e quindi,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| = |f'(\bar{x}) - L| < \varepsilon, \quad \forall a < x < a + \delta,$$

il che significa che $D_+ f(a) = L$. L'argomento per $D_- f(b)$ è del tutto analogo. ■

Coseno e seno su $\mathbb{R}$

Ora estendiamo coseno e seno all'intervallo $[-\pi, 0]$ “per parità”, ponendo:

$$\begin{cases} \cos t := \cos(-t), \\ \sin t := -\sin(-t), \end{cases} \quad -\pi \leq t < 0. \quad (21)$$

Osserviamo, di nuovo, che la continuità su $[-\pi, \pi]$ e la derivabilità su $[-\pi, 0)$ seguono immediatamente da questa definizione e la derivabilità in 0 segue dal Corollario 1.11. Inoltre vale (17) su tutto $[-\pi, \pi]$. Si noti anche che *il seno è strettamente crescente tra $-\pi/2$ (dove vale -1) e $\pi/2$ (dove vale 1).*

Infine, estendiamo coseno e seno a tutto $\mathbb{R}$ per “periodicità”, ponendo:

$$\begin{cases} \cos t := \cos(t - 2\pi k) \\ \sin t := \sin(t - 2\pi k) \end{cases} \quad \text{se } t \in [-\pi, \pi) + 2\pi k, \quad (0 \neq k \in \mathbb{Z}). \quad (22)$$

Con i soliti argomenti si verifica che coseno e seno sono differenziabili su tutto $\mathbb{R}$ e che vale la (17) per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Riassumendo abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 1.12 *Le funzioni coseno e seno definite su $[0, \pi/2]$ nella Definizione 1.9 ed estese a tutto $\mathbb{R}$ in (19), (21) e (22) sono funzioni differenziabili e periodiche di periodo 2π . Il coseno è una funzione pari e il seno una funzione dispari e soddisfano le relazioni*

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad (\forall t \in \mathbb{R}); \quad (23)$$

$$D \cos t = -\sin t, \quad D \sin t = \cos t, \quad (\forall t \in \mathbb{R}); \quad (24)$$

$$\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0, \quad \cos \pi = \sin \frac{3\pi}{2} = -1. \quad (25)$$

Infine, il coseno ristretto a $[0, \pi]$ è strettamente decrescente, mentre il seno ristretto a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è strettamente crescente.

Si osservi che da (24) seguono immediatamente i seguenti “limiti notevoli”:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2/2} = 1; \quad (26)$$

infatti, il primo limite è semplicemente la derivata di seno in 0 che coincide con $\cos 0 = 1$; per il secondo limite osserviamo che

$$\frac{1 - \cos t}{t^2/2} = 2 \cdot \frac{1 - \cos^2 t}{t^2(1 + \cos t)} = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cdot \frac{2}{1 + \cos t} \rightarrow 1, \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Formule di addizione

Un'altra proprietà fondamentale delle funzioni trigonometriche sono le “formule di addizione”:

Teorema 1.13 *Per ogni $s, t \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$\cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s, \quad (27)$$

$$\sin(t + s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s. \quad (28)$$

Dimostrazione Fissato $s \in \mathbb{R}$, definiamo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(t) &:= \cos(t + s) - \cos t \cos s + \sin t \sin s, \\ v(t) &:= \sin(t + s) - \sin t \cos s - \cos t \sin s, \\ E(t) &:= \frac{u(t)^2 + v(t)^2}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Si noti che $u' = -v$ e $v' = u$; dunque $E' = uu' + vv' = -uv + vu = 0$ e quindi $E'(t) = 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ma allora (per il teorema del valor medio di Lagrange), questo implica che $E(t)$ è costante su $\mathbb{R}$ e quindi $E(t) = E(0) = 0$, ossia, $u \equiv 0 \equiv v$, relazioni equivalenti, rispettivamente a (27) e (28). ■

Dalle formule di addizione (27), (28) (e dalle relazioni di parità) seguono immediatamente le seguenti *formule di duplicazione*:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \quad \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t. \quad (30)$$

Altre funzioni trigonometriche

Altre funzioni trigonometriche notevoli sono la tangente, la cotangente, la secante, la cosecante definite, rispettivamente come

$$\tan t := \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cotan t := \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \sec t := \frac{1}{\cos t}, \quad \csc t := \frac{1}{\sin t}. \quad (31)$$

Il dominio di tangente e secante è $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, mentre il dominio di cotangente e cosecante è $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$; la tangente e la cotangente sono periodiche di periodo π ; per ulteriori proprietà delle funzioni trigonometriche si veda l'Esercizio 1.2.

Funzioni trigonometriche inverse

Osservazione 1.14 (i) La funzione

$$x \in [-\pi/2, \pi/2] \mapsto \sin x \in [-1, 1] \quad (32)$$

è strettamente crescente e quindi invertibile. Dal teorema dei valori intermedi (essendo $\sin(-\pi/2) = -1$ e $\sin(\pi/2) = 1$) segue che l'immagine di tale funzione è $[-1, 1]$.

(ii) La funzione

$$x \in [0, \pi] \mapsto \cos x \in [-1, 1] \quad (33)$$

è strettamente decrescente e quindi invertibile. Dal teorema dei valori intermedi (essendo $\cos 0 = 1$ e $\cos(\pi) = -1$) segue che l'immagine di tale funzione è $[-1, 1]$.

(ii) La funzione

$$x \in (-\pi/2, \pi/2) \mapsto \tan x \in \mathbb{R} \quad (34)$$

è strettamente crescente e quindi invertibile. Dal teorema dei valori intermedi (essendo $\inf \tan x = -\infty$ e $\sup \tan x = +\infty$) segue che l'immagine di tale funzione è $\mathbb{R}$.

Grazie a queste osservazioni la seguente definizione è ben posta.

Definizione 1.15 (Rami principali delle funzioni trigonometriche inverse)

(i) *L'inversa della funzione (32) prende il nome di (ramo principale) dell'arcoseno:*

$$x \in [-1, 1] \mapsto \operatorname{Arcsen} x \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (35)$$

(ii) *L'inversa della funzione (33) prende il nome di (ramo principale) dell'arcocoseno:*

$$x \in [-1, 1] \mapsto \operatorname{Arccos} x \in [0, \pi]. \quad (36)$$

(iii) *L'inversa della funzione (34) prende il nome di (ramo principale) dell'arcotangente:*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{Arctan} x \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (37)$$

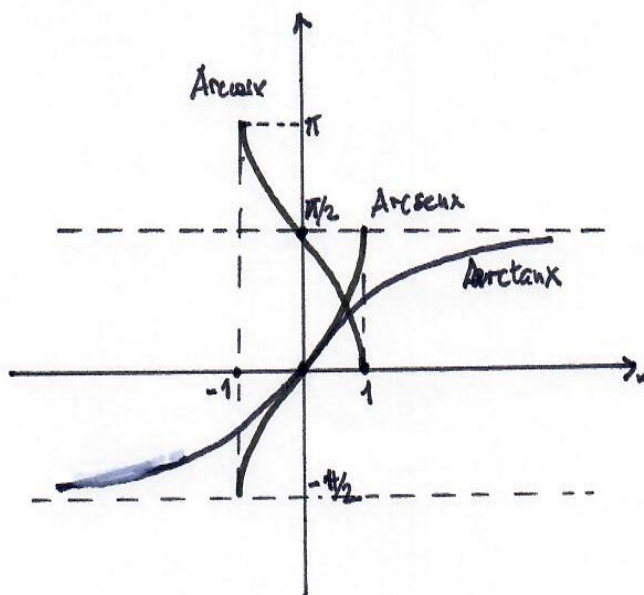


Figura 1.1: Funzioni trigonometriche inverse

Osservazione 1.16 Altri “rami” dell’arcoseno si ottengono considerando altri domini (massimali) su cui il seno è invertibile: ad esempio, $[\pi/2, 3\pi/2]$; su tale intervallo il seno è strettamente decrescente e la sua inversa $\text{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow [\pi/2, 3\pi/2]$ sarà una funzione strettamente decrescente.

Analogamente, altri “rami” dell’arcocoseno si ottengono considerando altri domini (massimali) su cui il coseno è invertibile: ad esempio, $[\pi, 2\pi]$: su tale intervallo il coseno è strettamente crescente e la sua inversa $\text{arcocosen} : [-1, 1] \rightarrow [\pi, 2\pi]$ sarà una funzione strettamente crescente e continua.

Gli altri “rami” dell’arcotangente si ottengono considerando altri domini (massimali) su cui la tangente è invertibile: ad esempio, $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Come si evince da questi esempi esistono infinite funzioni inverse (“rami”) delle funzioni trigonometriche caratterizzate dai (in generale diversi) codomini.

Esercizi

Esercizio 1.1 Si dimostri che, per $0 < x < 1$, $D_- A(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$.

Esercizio 1.2 Dimostrare analiticamente (ossia senza far uso degli assiomi della geometria euclidea) le identità trigonometriche elencate [qui](#) (tralasciare le identità dove appaiono i gradi e i numeri complessi).

Esercizio 1.3 Determinare tutti gli intervalli massimali dove sono strettamente monotone le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente e discutere in dettaglio le proprietà delle relative funzioni inverse (ossia, dei vari rami dell’arcoseno dell’arcoseno, arcocoseno, arcotangente e arcocotangente¹³) elencate [qui](#) e [qui](#).

¹³Ad esempio, il seno è strettamente decrescente su $I := [\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi]$ e il relativo ramo dell’arcoseno è definito come l’inversa di $t \in I \mapsto \sin t \in [-1, 1]$; tale ramo ha dunque dominio $[-1, 1]$ e immagine I .

Esercizio 1.4 (i) Dimostrare che

$$\sin t < t < \tan t, \quad \forall 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Suggerimento: si considerino le funzioni $u(t) = t - \sin t$ e $v(t) = \tan t - t$ su $[0, \pi/2]$ e si usi il Teorema di Lagrange

(ii) Dimostrare che $|\sin t| < |t|$ per ogni $t \neq 0$.

Esercizio 1.5 Dimostrare i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsen} x}{x} = 1 \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} = 1 \quad (39)$$

Esercizio 1.6 Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che vale 0 in $x = 0$ e $x \sin(1/x)$ per $x \in (0, 1]$.

(i) Dimostrare che $f \in C([0, 1])$.

(ii) Trovare i punti critici di f in $(0, 1)$.

(iii) Trovare il massimo e il minimo di f su $[0, 1]$.

Esercizio 1.7 Dimostrare che valgono le seguenti identità

$$2 \operatorname{Arctan}(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \pi - \operatorname{Arcsen} \frac{1}{x}, \quad x \geq 1 \quad (40)$$

$$\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad (41)$$

Esercizio 1.8 Sia $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) := 0$. Dimostrare che f è derivabile su $\mathbb{R}$ ma che non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.