Irrazionalità di π

La seguente è forse la dimostrazione più semplice dell'irrazionalità di[10] π. Cominciamo con un lemma preparatorio.

Lemma 2 *Dati $p, q, n \in \mathbb{N}$, sia $r = p/q \in \mathbb{Q}$ e sia P il seguente polinomio di grado $2n$:*

$$P(x) = \frac{x^n (p - qx)^n}{n!} . \tag{7.3}$$

(i) *P soddisfa le seguenti relazioni*[11]

$$P(r - x) = P(x) , \ \forall\, x ; \qquad D^j P(r) = (-1)^j D^j P(0) \in \mathbb{Z} , \ \forall j \in \mathbb{N}_0 ; \tag{7.4}$$

$$P(x) \le \frac{(qr^2/4)^n}{n!} , \ \forall\, x \in [0, r] ; \qquad P(x) > 0 , \ \forall\, x \in (0, r) . \tag{7.5}$$

(ii) *Sia $Q := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^{2k} P$. Allora $Q(0) + Q(r) =: m \in \mathbb{Z}$ e, per ogni x,*

$$Q'' + Q = P , \qquad \big(Q' \sin x - Q \cos x\big)' = P \sin x . \tag{7.6}$$

Dimostrazione (i) La prima relazione in (7.4) segue immediatamente dalla definizione. Per la formula del binomio di Newton si ha che[12]

$$P(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} m_k x^{n+k} , \qquad m_k \in \mathbb{Z} ,$$

da cui segue[13]

$$D^j P(0) = \begin{cases} 0 , & \text{se } 0 \le j < n , \text{ o se } j > 2n , \\ \dfrac{j!}{n!} m_{j-n} \in \mathbb{Z} & \text{se } n \le j \le 2n , \end{cases} \tag{7.7}$$

e quindi (essendo $j!/n! \in \mathbb{N}$ per ogni $j \ge n$) $D^j P(0) \in \mathbb{Z}$ per ogni j. Per la prima relazione in (7.4) si ha che $D^j P(r) = (-1)^j D^j P(0) \in \mathbb{Z}$ che completa la dimostrazione di (7.4).
Le relazioni in (7.5) seguono subito osservando che $P = \big(x(p-qx)\big)^n / n!$ e che $x(p-qx) = qx(r-x)$ è una parabola che si annulla in 0 e $r = p/q$ e massimo in $r/2 = p/(2q)$.
(ii) Dalla definizione di Q e da (7.4) segue immediatamente che $m := Q(0) + Q(r) \in \mathbb{Z}$.
Per (7.7), $D^{2n+2} P = 0$, e dunque:

$$Q'' = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^{2k+2} P = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k D^{2k+2} P = - \sum_{h=1}^{n} (-1)^h D^{2h} P = -Q + P .$$

[10] Cfr. *https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational*
[11] D^j denota la derivata di ordine j rispetto a x.
[12] Si ricordi che i coefficienti binomiali sono numeri naturali; cfr. Lemma 1.42.
[13] $D^j x^m = \frac{m!}{j!} x^{m-j}$ se $0 \le j \le m$ e $D^j x^m = 0$ per ogni $j > m$, quindi $D^j x^m|_{x=0} = j!$ se $j = m$ e 0 altrimenti.

che è equivalente alla prima relazione in (7.6); la seconda relazione segue immediatamente dalla prima. ∎

Teorema 2 $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che $\pi = p/q =: r \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e siano P e Q come nel Lemma 2. Dal Teorema Fondamentale del Calcolo segue che

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} P(x)\sin x &\overset{(7.6)}{=} \int_0^{\pi} \Big(Q' \sin x - Q\cos x\Big)' \\ &= \Big[Q' \sin x - Q\cos x\Big]_0^{\pi} = Q(\pi) + Q(0) = m\,,\end{aligned}$$

con $m \in \mathbb{Z}$ per il punto (ii) del Lemma 2. Da (7.5), segue che $P \sin x$ è (continua) e strettamente positiva su $(0, \pi)$; quindi[14] $m > 0$, ossia (essendo $m \in \mathbb{Z}$), $m \geq 1$. Ma allora, usando la prima stima in (7.5), per n sufficientemente grande[15], avremmo

$$1 \leq m = \int_0^{\pi} P \sin x \leq 2\,\frac{(q\pi^2/4)^n}{n!} < 1\,,$$

ottenendo una contraddizione. Quindi l'assunzione che $\pi \in \mathbb{Q}$ è falsa. ∎

[14] Cfr. Es. 4.8.
[15] $\forall A > 0$, $A^n/n! \to 0$.