Serie di Taylor

Definizione 1 (i) *Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$. Se f è derivabile un numero arbitrario di volte in x_0, chiameremo la serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \,, \qquad a_k := \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \,, \tag{1}$$

la **serie di Taylor** *di f in x_0.*
(ii) *Una funzione f si dice* **analitica in** x_0 *se è derivabile un numero arbitrario di volte in x_0 e la sua serie di Taylor coincide con f in un intorno di x_0.*

Ovviamente, dal teorema sulle regolarità delle serie di potenze (Proposizione 6 nel file) segue che la serie di Taylor di una serie di potenze f centrata in x_0 coincide con f all'interno dell'intervallo di convergenza della serie e quindi *le serie di potenze sono funzioni analitiche in x_0*.

Vediamo, ora, un esempio "negativo", ossia di una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ non analitica in 0. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue: $\varphi(x) = 0$ se $x \le 0$ e $\varphi(x) = e^{-1/x}$ per $x > 0$. È facile verificare che[1] $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e dunque la sua serie di Taylor in 0 è la serie identicamente nulla (che ha raggio di convergenza $+\infty$); d'altra parte $\varphi(x) > 0$ se $x > 0$ e dunque φ non è analitica in 0.

Osserviamo che dalla formula di Taylor con resto di Lagrange segue immediatamente il seguente

Lemma 2 (Criterio di analiticità) *Sia f una funzione definita in $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ derivabile un numero arbitrario di volte in I e tale che*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{M_k}{k!}\, r^k = 0 \,, \qquad M_k = M_k(r) := \max_{|x-x_0|\le r} |f^{(k)}(x)| \,. \tag{2}$$

Allora, f è analitica in x_0. Più precisamente, $R > r$ (dove R è il raggio di convergenza della serie di Taylor di f in x_0) e f coincide con la sua serie di Taylor sull'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Discutiamo ora le serie di Taylor in[2] 0 di alcune funzioni elementari. Nelle seguenti formule R denota il raggio di convergenza della relativa serie di Taylor.

(a) $$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{k=p}^{\infty} \binom{k}{p} x^{k-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p}{k} x^k \,, \qquad p \in \mathbb{N}_0 \,, |x| < R = 1.$$

Dimostrazione Per ogni $p \ge 0$, $D^p(1-x)^{-1} = p!(1-x)^{-(p+1)}$ e dalla formula per la serie geometrica, per $|x| < 1$, e dalla Proposizione 6 nel file segue che

$$D^p \frac{1}{1-x} = D^p \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=p}^{\infty} k \cdots (k-p+1) x^{k-p} = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{k!}{(k-p)!} x^{k-p} \,.$$

Da tali relazioni segue (a) in $|x| < 1$; dalla Proposizione 6 nel file) segue che $R = 1$ (essendo 1 il raggio di convergenza della serie geometrica). ∎

---

[1] Infatti, per induzione, si vede che, per $x > 0$, $\varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \varphi(x)$ dove P_n è un polinomio di grado $n-1$ (Esercizio **1.1**). Dunque, poiché $\lim_{x\to 0+} \varphi(x)/x^m = 0$ per ogni m, si ha che $\varphi^{(n)}(0+) = 0$ per ogni n; in particolare $\varphi^{(n)}(0) = 0$ per ogni n.

[2] Spesso, la serie di Taylor di una funzione in 0 viene chiamata serie di *Maclaurin*. Come detto più volte passare da x_0 a 0 è una semplice traslazione delle x.

(b) $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty).$

Dimostrazione Segue da $De^x = e^x$ e dal criterio di analiticità, essendo $M_k(r) = e^r$ per ogni k. $\blacksquare$

(c) $\operatorname{senh} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty).$

Dimostrazione Le formule seguono immediatamente dalla serie di Taylor dell'esponenziale (e dall'additività delle serie convergenti). $\blacksquare$

(d) $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty).$

Dimostrazione Le serie di Taylor di seno e coseno seguono immediatamente dalle formule di derivazione e (d) segue dal criterio di analiticità essendo $M_k(r) \le 1$ per ogni k e per ogni r. $\blacksquare$

(e) $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\,, \qquad |x| < R = 1.$

Dimostrazione Per ogni $|x| < 1$,

$$D\log(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = D \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

Dunque, le funzioni $\log(1+x)$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ differiscono per una costante sull'intervallo $(-1, 1)$, ma poiché in $x = 0$ entrambe valgono 0, esse devono coincidere. Dalla formula di Cauchy–Hadamard segue che $R = 1$. $\blacksquare$

(f) $\arctan x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,, \qquad (\arctan 0 = 0)\,, \quad |x| < R = 1.$

Dimostrazione Ragionando come in (e) si ottiene (f). $\blacksquare$

Infine[3] discutiamo la serie di Taylor della funzione $(1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Estendiamo la definizione di coefficiente binomiale come segue

Definizione 3 *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}_0$, poniamo*

$$\binom{\alpha}{0} := 1\,; \qquad \binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) = \frac{\alpha \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}\,, \quad (\forall k \ge 1)\,. \tag{3}$$

I primi quattro coefficienti binomiali di un numero real α qualunque sono dunque:

$$\binom{\alpha}{0} = 1\,, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha\,, \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,.$$

[3] Per altri sviluppi in serie di Taylor, vedi Esercizio 1.3.

Ad esempio,

$$\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \geq 1 \end{cases} \quad ; \qquad \binom{\alpha}{k} = 0\,, \quad \text{se } \alpha \in \mathbb{N} \text{ e } k > \alpha\,, \tag{4}$$
$$\binom{-\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \binom{\frac12}{k} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k \cdot k!}\,,\ (k \geq 2)\,.$$

dove il "doppio fattoriale" $k!!$ è definito come segue:

$$0!! := 1\,, \quad 1!! := 1\,, \qquad \text{e, per } k \geq 2\,, \qquad k!! := k \cdot (k-2)!!\,. \tag{5}$$

(g) $\displaystyle (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\,, |x| < R = 1\,.$

Dimostrazione Innanzitutto, se $\alpha \in \mathbb{N}_0$, da (4) segue che (g) non è altro che la formula del binomio di Newton.
Assumiamo ora che $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0$. Poiché $D^k(1+x)^\alpha = \alpha \cdots (\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$, la serie di Taylor di $(1+x)^\alpha$ è data da $f(x) = \sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}x^k$. Tale serie, come segue facilmente dal criterio del rapporto, ha raggio di convergenza[4] $R=1$. Per $|x|<1$ f è derivabile e si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\ k\ x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k+1}\ (k+1)\ x^k = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k+1}\ (k+1)\ x^k\,,$$

da cui, osservando che

$$\binom{\alpha}{k+1}(k+1) + \binom{\alpha}{k}k = \alpha\binom{\alpha}{k}\,,$$

segue che

$$(1+x)f'(x) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha}{k+1}(k+1) + \binom{\alpha}{k}k\right)x^k = \alpha + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = \alpha f(x)\ ,$$

ossia,

$$(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = 0\ . \tag{6}$$

Ora, se definiamo $F(x) := f(x)/(1+x)^\alpha$, otteniamo

$$F'(x) = \frac{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} \overset{(6)}{=} 0\ , \qquad \forall |x| < 1\,,$$

Poiché $F(0)=1$, dal teorema di Lagrange, segue che $F(x)=1$ per ogni $x \in (-1,1)$, il che implica (g). ∎

Concludiamo questa sezione con la dimostrazione dell'irrazionalità del numero di Nepero:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,. \tag{7}$$

Dimostrazione L'uguaglianza in (7) segue immediatamente dall'espansione (b) con $x=1$. Stimiamo, ora, le code della serie in (7). Per ogni $q \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{(q+1)!}\Big(1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \cdots\Big) < \frac{1}{(q+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q+2)^k} \\ &= \frac{1}{q!}\,\frac{q+2}{(q+1)^2} < \frac{1}{q!}\,\frac{1}{q}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

[4] $\left|\binom{\alpha}{k+1}\cdot\binom{\alpha}{k}^{-1}\right| = \left|\frac{k-\alpha}{k}\right| \to 1$ per $k \to +\infty$.

Ora, supponiamo per assurdo che e sia razionale ossia che $e = p/q$ con p e q numeri naturali co–primi: da (i) seguirebbe che

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \overset{(8)}{<} \frac{1}{q!}\,\frac{1}{q}\,.$$

Moltiplicando tale relazione per $q!$ otterremmo

$$0 < m := p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < \frac{1}{q} \le 1\,,$$

il che è impossibile essendo m un numero intero. ∎

Esercizi

Esercizio 1.1 Sia $\varphi(x) = 0$ se $x \le 0$ e $\varphi(x) = e^{-1/x}$ per $x > 0$. Dimostrare che, per $x > 0$, $\varphi^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\varphi(x)$ dove P_n è un polinomio di grado $n-1$. Dedurne che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che $\varphi^{(n)}(0) = 0$ per ogni n.

Esercizio 1.2 Dimostrare la (4).

Esercizio 1.3 Si dimostrino le seguenti espansioni in serie di Taylor (R denota il raggio di convergenza delle serie):

(h) $\operatorname{arcsen} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,,\qquad (\operatorname{arcsen} 0 = 0)\,,\quad |x| < R = 1\,.$

(i) $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,,\qquad \big(\arccos 0 = \frac{\pi}{2}\big)\,,\quad |x| < R = 1\,.$

(j) $\operatorname{arcsenh} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,,\qquad |x| < R = 1\,.$

(k) $\operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,,\qquad |x| < R = 1\,.$