Limite superiore e criterio della radice generalizzato

Sia $\{a_n\}$ una successione qualunque e definiamo gli insiemi dei valori della successione "a partire da n" e i loro estremi superiori:

$$A_n = \{a_k \big| k \geq n\} = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\}, \qquad \bar{a}_n = \sup A_n . \tag{1}$$

Si osservi che se la successione è limitata, tutti gli $\bar{a}_n$ sono numeri reali, mentre se la successione non è limitata superiormente, $\bar{a}_n = +\infty$ per ogni n; nel primo caso, poiché $A_{n+1} \subseteq A_n$, si ha che $\bar{a}_{n+1} \leq \bar{a}_n$ ossia *i numeri $\bar{a}_n$ formano una successione decrescente* e quindi esiste il limite $\lim \bar{a}_n \in [-\infty, +\infty)$ che coincide con $\inf \bar{a}_n$. In vista di queste osservazioni, diamo la seguente

Definizione 1 *Data una successione $\{a_n\}$, e definiti A_n e $\bar{a}_n$ come in (1), e chiamiamo "limite superiore" (o limsup, o massimo limite) di $\{a_n\}$ l'elemento di $\mathbb{R}^*$ dato da:*

$$\limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n := \begin{cases} +\infty\,, & \text{se } \bar{a}_1 = +\infty\,; \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \bar{a}_n \;= \inf\{\bar{a}_n \big| n \geq 1\}\,, & \text{se } \bar{a}_1 < +\infty\,. \end{cases} \tag{2}$$

Osservazione 2 (i) Il limite superiore di una successione (al contrario del limite) esiste sempre (in $\mathbb{R}^*$).
(ii) Il limite superiore di una successione può essere $-\infty$: ad esempio, se $a_n = -n$, $\bar{a}_n = a_n \to -\infty$ e dunque $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$.

Le proprietà del limite superiore che ci serviranno in questa sezione sono raccolte nel seguente

Lemma 3 *Sia $\{a_n\}$ una successione e $M = \overline{\lim}\, a_n$ il suo limite superiore. Allora,*
(i) *se $M < +\infty$, per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists\ N$ tale che $a_n < M + \varepsilon$ per ogni $n \geq N$;*
(ii) *per ogni $\alpha < M$ e per ogni N esiste $n \geq N$ tale che $a_n > \alpha$.*
(iii) *Se $a_n \geq 0$ e $b_n \to \lambda > 0$, allora $\overline{\lim}(b_n a_n) = \lambda\, \overline{\lim}\, a_n$.*

Dimostrazione (i) Dalla caratterizzazione di estremo inferiore segue che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $\bar{a}_N < M + \varepsilon$; quindi, per definizione di $\bar{a}_N$ segue che $a_n \leq \bar{a}_N < M + \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.
(ii) Sia $\alpha < M$ e sia $V = (\alpha, +\infty)$. V è un intorno di M e dunque, dalla definizione di limite, poiché $\bar{a}_n \to M$, esiste N_0 tale che $\bar{a}_m \in V$ (ossia $\bar{a}_m > \alpha$) per ogni $m \geq N_0$. Fissiamo $m > \max\{N, N_0\}$. Dalla definizione di $\bar{a}_m$ (e la caratterizzazione di estremo superiore) segue che esiste $n \geq m \geq N$ tale che $a_n > \alpha$.
(iii) Facciamo due osservazioni preliminari. Dalla definizione di estremo superiore segue facilmente[1] che se A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e $c > 0$, allora $\sup(cA) = c \sup A$; dunque $\sup(cA_n) = c\bar{a}_n$, il che implica che $\overline{\lim}(ca_n) = c\, \overline{\lim}\, a_n$. Si noti poi che se $a_n \leq a'_n$ per $n \geq N$, chiaramente $\bar{a}_n \leq \bar{a}'_n$ per $n \geq N$, e dunque $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a'_n$.
Ora, fissiamo ora $0 < \varepsilon < 1$ e sia N tale che $(\lambda - \varepsilon) < b_n < (\lambda + \varepsilon)$ per ogni $n \geq N$. Allora, $(\lambda - \varepsilon)a_n \leq b_n a_n \leq (\lambda + \varepsilon)a_n$ per ogni $n \geq N$ e, per le osservazioni appena fatte, $(\lambda - \varepsilon)\, \overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}(b_n a_n) \leq (\lambda + \varepsilon)\, \overline{\lim}\, a_n$ e per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi. ∎

Passiamo al **criterio generalizzato della radice**

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali e sia $M := \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Allora la serie $\sum a_n$ converge assolutamente se $M < 1$ e non converge se $M > 1$ (poiché a_n non tende a 0).

[1] Es **0.3**; si ricorda che $cA := \{ca \big| a \in A\}$..

Dimostrazione Se $M < 1$, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $0 < \theta := M + \varepsilon < 1$. Allora per il punto (i) del lemma segue che esiste N tale che $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \theta$ per ogni $n \geq N$. Quindi $|a_n| \leq \theta^n$ e la tesi segue per confronto con la serie geometrica di ragione $0 < \theta < 1$.
Se $M > 1$, sia $1 < \alpha < M$. Dal punto (ii) del lemma segue che esistono infiniti n tali che $|a_n| > \alpha^n$ e quindi la successione a_n non tende a zero e la serie non converge per il criterio necessario di Cauchy. ∎

Esercizi

Esercizio 1.1 Sia $a_n = 1/2^n$ se n è pari e $a_n = 1/3^n$ se n è dispari. Dimostrare che non esiste $\lim a_n^{1/n}$ e che $\overline{\lim}\, a_n^{1/n} = 1/2$.

Esercizio 1.2 Sia $M = \overline{\lim}\, |a_n|$. Dimostrare che se $M < 1$, per ogni $0 < \theta < M$ esiste N tale che $\sum_{n \geq N} |a_n| \leq \theta^N/(1-\theta)$, mentre se $M > 1$ esistono infiniti a_n maggiori in valore assoluto di α^n, per un opportuno $\alpha > 1$, ossia, esiste una successione n_k strettamente crescente e a valori in $\mathbb{N}$ tale che $|a_{n_k}| \geq \alpha^{n_k}$ per ogni k.

Esercizio 1.3 Dimostrare che se A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e $c > 0$, allora $\sup(cA) = c \sup A$.

Serie di potenze

Consideriamo una serie numerica $\sum u_n$ con u_n dipendente da un parametro reale, ossia $u_n = u_n(x)$ con $x \in E \subseteq \mathbb{R}$. Se $\sum u_n$ converge per ogni $x \in E$, allora tale serie definisce una funzione reale $f : x \in E \mapsto f(x) := \sum u_n(x)$. Ad esempio abbiamo visto che la serie geometrica di ragione x, dove $u_n(x) = x^n$, converge per ogni $x \in (-1, 1)$ e la sua somma (su n che varia da 0 a ∞) coincide con $1/(1-x)$.

In questa sezione generalizziamo questo esempio e studiamo le prime proprietà delle cosiddette *serie di potenze*, ossia serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{3}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto fissato (*centro della serie*), $a_n \in \mathbb{R}$ sono i suoi *coefficienti*, e x è una variabile reale.

Esempio 4 Sia $x_0 = 0$ e consideriamo le serie di potenze con coefficienti dati da: (i) $a_n = n^n$; (ii) $a_n = 1/n^n$ e (iii) $a_n = 1/n$. Dal criterio della radice applicato a $\sum |a_n||x|^n$ segue che la serie (i) converge solo per $x = 0$; la serie (ii) converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$; la serie (iii) converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$, mentre converge condizionatamente in $x = -1$ (Leibniz) e diverge in $x = 1$.

Formula di Cauchy–Hadamard

Data una serie di potenze (3), sia[2]

$$R^{-1} := \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} . \tag{4}$$

Allora, per ogni $r < R$, $\sum |a_n| r^n < +\infty$ mentre se $r > R$, $|a_n| r^n$ non tende a zero.

Dimostrazione L'idea è di usare il criterio della radice generalizzato alla serie (3) o, equivalentemente, alla serie numerica $\sum |a_n| r^n$ con $r = |x - x_0| \geq 0$. Sia dunque $r = |x - x_0|$, $M_r := \overline{\lim}(|a_n| r^n)^{\frac{1}{n}}$ e $M := \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Per il Lemma 0.3, $M_r = rM$ e quindi se $M = +\infty$ (ossia $R = 0$) $M_r < +\infty$ solo se $r = 0$ (ossia, $x = x_0$); se $M = 0$ (ossia $R = +\infty$), $M_r = 0$

[2] Qui vale la convenzione che $R = +\infty \iff R^{-1} = 0$ e $R = 0 \iff R^{-1} = +\infty$.

per ogni r (ossia per ogni $x \in \mathbb{R}$). Nel caso $M \in (0, +\infty)$ si ha che $M_r < 1$ se e solo se $r = |x - x_0| < R$ e $M_r > 1$ se e solo se $r > R$. La tesi segue quindi dal criterio della radice generalizzato. ∎

Osservazione 5 (i) $R \in [0, +\infty]$ prende il nome di *raggio di convergenza* della serie (3) e la formula di Cauchy–Hadamard dice che se $R = 0$, la serie converge solo per $x = x_0$ (dove la serie vale a_0) e se $R > 0$, la serie converge assolutamente per ogni $|x - x_0| < R$ mentre (se $R < +\infty$) la serie non converge per $|x - x_0| > R$ poiché i termini della serie non tendono a zero.

(ii) Dunque, *il raggio di convergenza R è l'unico elemento di $[0, +\infty]$ tale che, per ogni $r < R$, $\sum |a_n| r^n < +\infty$ e, per ogni $r > R$, $|a_n| r^n \geq 1$ per infiniti n.*

(iii) Da (ii) segue anche che $R = \sup \{ r \geq 0 \big| \sum |a_n| r^n < \infty \}$.

(iv) *Se $\lim |a_{n+1}/a_n| = s \in [0, +\infty]$, allora la serie di potenze $\sum a_n (x - x_0)^n$ ha raggio di convergenza*[3] $R = s^{-1}$.

Infatti, applicando il criterio del rapporto alla serie $\sum |a_n| r^n$ segue che se $r < s^{-1}$ tale serie converge, mentre se $r > s^{-1}$ la serie non converge (non essendo infinitesima). Ma, per il punto (ii), questo significa che $s^{-1} = R$.

Regolarità delle serie di potenze

Le serie di potenze (3) definiscono una funzione $f(x)$ per x nell'intervallo di convergenza $(x_0 - R, x_0 + R)$ dove R è il raggio di convergenza della serie. È naturale chiedersi quale sia la regolarità della funzione f.

Proposizione 6 *Sia $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Allora $f \in C^\infty(I)$ dove $I = (x_0 - R, x_0 + R)$. Inoltre, per ogni $k \geq 1$, $f^{(k)}$ è la serie di potenze con raggio di convergenza R data*

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n(n-1) \cdots (n-k+1) \, (x - x_0)^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} \, (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) \, (x - x_0)^n \,, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

e, in particolare,

$$f^{(k)}(x_0) = k! \, a_k \,, \qquad \forall k \geq 0 \,. \qquad (6)$$

Dimostrazione A meno di una traslazione nelle x possiamo assumere che $x_0 = 0$. È anche chiaro che basta dimostrare la proposizione nel caso $k = 1$, poiché il caso generale segue immediatamente per iterazione (o induzione). Assumiamo quindi $x_0 = 0$ e $k = 1$, nel qual caso la (5) diviene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n \, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \, (n+1) \, x^n \,. \qquad (7)$$

Innanzitutto osserviamo che, poiché $\lim n^{1/n} = 1$, dal Lemma 0.3–(iii) segue che la serie di potenze in (7) ha raggio di convergenza[4] R.
Fissiamo $x \in (-R, R)$. Sia r tale che $|x| < r < R$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché la serie $\sum |a_n| n r^{n-1}$ converge, esiste N tale che

$$\sum_{n > N} |a_n| n r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4} \,. \qquad (8)$$

[3] Con la solita convenzione che $s^{-1} = +\infty$ se $s = 0$ e $s^{-1} = 0$ se $s = +\infty$.
[4] Ovviamente, i raggi di convergenza di $\sum a_n x^n$ e $x^k \sum a_n x^n = \sum a_n x^{n+k}$ sono gli stessi per ogni k fissato.

Sia

$$S_h := \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \Big)$$

e si osservi che $\lim_{h\to 0} S_h = 0$. Dunque, esiste $0 < \delta < r - |x|$ tale che, per ogni $0 < |h| < \delta$, $|S_h| < \varepsilon/2$. Per il teorema del valor medio di Lagrange si ha che, per ogni n, esiste $t \in (0,1)$ tale che

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n(x+th)^{n-1}\,. \tag{9}$$

Allora, se $0 < |h| < \delta < r - |x|$, si ha

$$\begin{aligned}
\Big| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Big| \quad &= \quad \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \Big) \Big| \\
&\le \quad |S_h| + \sum_{n>N}^{\infty} \Big| a_n \Big(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \Big) \Big| \\
&\overset{(9)}{\le} \quad |S_h| + \sum_{n>N}^{\infty} n |a_n| \big(|x+th|^{n-1} + |x|^{n-1} \big) \\
&\le \quad |S_h| + \sum_{n>N}^{\infty} 2n |a_n| r^{n-1} \\
&\overset{(8)}{\le} \quad |S_h| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Osservazione 7 Se due serie di potenze $\sum a_n (x-x_0)^n$ e $\sum b_n (x-x_0)^n$ coincidono su un intervallo, esse definiscono un'unica funzione f su tale intervallo e dunque dalla (6) segue che $a_n = b_n$ per ogni n.