Esercizi su serie numeriche (18/3/25)

Esercizio 1 Sia $a_n = 1/2^n$ se n è dispari, e $a_n = 1/2^{n+1}$ se n è pari. Dimostrare che $\lim a_n^{1/n} = 1/2$ (e quindi la serie $\sum a_n$ converge) ma che non esiste $\lim a_{n+1}/a_n$.

Esercizio 2 Sia $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ e $b_n = a_n + \frac{1}{n}$. Dimostrare che $a_n \sim b_n$ (ossia, $\lim b_n/a_n = 1$), ma che $\sum a_n$ converge, mentre $\sum b_n$ diverge.
Quindi: *il criterio del confronto asintotico non si estende a serie a termini in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 3

(i) Per $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n = 1/n$ se n è dispari e $a_n = 0$ per n pari. Dimostrare che la serie $\sum a_n$ diverge.

(ii) Sia $a_n = 1/n$ se $n = 2^k$ per qualche k e $a_n = 0$ altrimenti. Dimostrare che $\sum a_n$ converge.

Esercizio 4

Sia $a_n = 1/n$ se n è dispari, e $a_n = 1/2^n$ se n è pari. Dimostrare che la successione $\{a_n\}$ non è monotòna e che $\sum(-1)^{n-1}a_n$ diverge.
Quindi: *Nel criterio di Leibniz l'ipotesi di monotonìa è indispensabile.*

Suggerimento: trovare b_n e c_n tali che $(-1)^{n-1}a_n = b_n + c_n$ con $\sum b_n$ divergente e $\sum c_n$ convergente.

Esercizio 5

Sia $a_n = 1/n^2$ se $n = 2^k$ per qualche k e $a_n = 1/n$ altrimenti. Dimostrare che la successione $\{a_n\}$ non è monotòna e che $\sum 2^n a_{2^n}$ converge ma che $\sum a_n$ diverge.
Quindi: *Nel criterio di condensazione di Cauchy, l'ipotesi di monotonìa è indispensabile.*

Suggerimento: Se n è dispari $a_n = 1/n$.