6.2 Bolzano–Weierstrass

6.2.1 Sottosuccessioni

Definizione 6.15 *Una* **sottosuccessione** *(o* **successione estratta***) di una successione* $\{a_n\}$ *è una successione* $\{b_k\}$ *data da* $b_k = a_{n_k}$ *con* $\{n_k\}$ *strettamente crescente e a valori in* $\mathbb{N}$.

Osservazione 6.16 (i) In altri termini, una sottosuccessione è una funzione composta $a \circ n$ di una successione $a = \{a_n\}$ con una successione $n = \{n_k\}$ strettamente crescente e a valori in $\mathbb{N}$ (che è il dominio della funzione a).

(ii) Dal teorema ponte per successioni (cfr. Osservazione 2.49–(ii)) segue immediatamente che:

$a_n \to L \in \mathbb{R}^*$ *se e solo se* $a_{n_k} \to L$ *per ogni sottosuccessione* $\{a_{n_k}\}$.

Diamo, ora, una semplice caratterizzazione di successione non limitata superiormente (o inferiormente) in termini di sottosuccessioni:

Lemma 6.17 $\{a_n\}$ *non è limitata superiormente [inferiormente]* $\iff \exists\, \{a_{n_k}\}$ *di* $\{a_n\}$ *strettamente crescente [decrescente] tale che* $\lim a_{n_k} = +\infty$ $[\lim a_{n_k} = -\infty]$.

Dimostrazione L'implicazione "$\Longleftarrow$" è ovvia. Dimostriamo "$\Longrightarrow$". Definiamo la successione $\{n_k\}$ in modo ricorsivo. Sia $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_1} > 1$. Scegliamo poi $n_2 > n_1$ tale che[5] $a_{n_2} > \max\{a_{n_1}, 2\}$ e, iterativamente, scegliamo $n_{k+1} > n_k$ tale che $a_{n_{k+1}} > \max\{a_{n_k}, k\}$. La sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ ha le proprietà richieste.

Il caso $\{a_n\}$ non limitata inferiormente segue considerando la successione $\{-a_k\}$ ∎

Vediamo alcuni esempi espliciti di sottosuccessioni regolari di successioni che non hanno invece limite:

(i) Sia $a_n = (-1)^n$. Se $n_k = 2k$ allora $\lim_k a_{n_k} = 1$; se $m_k = (-1)^{2k+1}$ allora $\lim_k a_{m_k} = -1$. I numeri ± 1 sono gli unici limiti possibili di sottosuccessioni convergenti di[6] $\{a_n\}$.

(ii) Sia $a_n = \mathrm{sen}(n\pi/4)$. È facile vedere che esistono 5 valori limite diversi per cui esistono sottosuccessioni tendenti a tali valori: tali valori sono: 0, ± 1 e $\pm\sqrt{2}/2$.

(iii) **(Una successione con sottosuccessioni con limite qualunque** $L \in \mathbb{R}^*$**)** Poiché $\mathbb{Q}$ è numerabile, esiste una successione iniettiva $\{a_n\}$ tale che $\mathbb{Q} = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ e poiché i razionali sono densi in $\mathbb{R}^*$ si ha che $\mathcal{D}^*\mathbb{Q} = \mathbb{R}^*$. Sia $L \in \mathbb{R}^* = \mathcal{D}^*\mathbb{Q}$. Dalla caratterizzazione per successione del derivato (Proposizione 2.47) segue che esiste una successione (non necessariamente crescente) $k \in \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \to +\infty$, tale che $a_{n_k} \to L$; dal Lemma 6.17 segue che possiamo assumere che n_k sia *strettamente* crescente.

6.2.2 Teorema di Bolzano–Weierstrass

Un risultato fondamentale legato alle sottosuccessioni è il seguente

Teorema 6.18 (Bolzano–Weierstrass) *Da ogni successione in* $\mathbb{R}$ *è possibile estrarre una sottosuccessione regolare (ossia avente limite in* $\mathbb{R}^*$*).*

[5] Si osservi che se $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ non è limitato superiormente, allora $\{a_n \,|\, n \geq N\}$ non è limitato superiormente per ogni N.

[6] Vedi anche Es. **6.6**.

Dimostrazione Sia $\{x_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $\{x_n\}$ non è limitata la tesi segue dal Lemma 6.17.
Consideriamo dunque una successione limitata $\{x_n\}$. Allora, esistono due numeri a e b tali che $a \leq x_n \leq b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $I_0 = [a, b] =: [a_0, b_0]$ e dividiamo in due tale intervallo: $I_0 = I \cup I'$ con $I = [a, c]$, $I' = [c, b]$ essendo $c = (a+b)/2$ il punto di mezzo di I_0. Chiamiamo $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in I\}$ e $\mathcal{N}' = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in I'\}$. Chiaramente almeno uno dei due insiemi $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ contiene infiniti elementi (poiché $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}' = \mathbb{N}$). Se $\mathcal{N}$ contiene infiniti elementi poniamo $I_1 := I$ e $\mathcal{N}_1 := \mathcal{N}$ altrimenti, poniamo $I_1 := I'$ e $\mathcal{N}_1 := \mathcal{N}'$. Chiamiamo a_1 l'estremo di sinistra di I_1 e b_1 l'estremo di destra: chiaramente, $a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$ e $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$. Ora, iteriamo la stessa costruzione con I_1 al posto di I_0 costruendo I_2 e $\mathcal{N}_2$ e così via. In tal modo otteniamo una sequenza di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ tali che, per ogni $k \geq 0$, si ha:

(i) $a_0 \leq \cdots \leq a_{k-1} \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \leq \cdots \leq b_0$

(ii) $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$

(iii) $\mathcal{N}_k = \{n : x_n \in I_k\}$ contiene infiniti elementi.

Quindi, la successione $\{a_k\}$ è monotòna crescente e limitata superiormente (da un qualunque b_j), mentre $\{b_k\}$ è monotòna decrescente e limitata inferiormente (da un qualunque a_j). Dunque esistono i limiti $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \alpha$ e $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \beta$. Dalla (ii) segue che $\alpha = \beta$ poiché

$$\beta - \alpha = \lim_{k\to\infty} b_k - a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0\,.$$

Ora, scegliamo $n_1 > 0$ tale che $n_1 \in \mathcal{N}_1$; $n_2 > n_1$ tale che $n_2 \in \mathcal{N}_2$; e possiamo iterare (per la (iii)) in modo tale che $n_k \in \mathcal{N}_k$ per ogni k e $n_{k+1} > n_k$. Quindi $x_{n_k} \in I_k$ per ogni k, ossia, $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ e per il criterio del confronto $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha \in [a, b]$. ∎

Osservazione 6.19 In particolare, dal Teorema di Bolzano–Weierstrass segue che[7]

(i) *Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in* $\mathbb{R}$.

Un'altra formulazione del teorema di Bolzano–Weierstrass (che è un facile conseguenza del Teorema 6.18) è la seguente:

(ii) *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}$ *un insieme limitato e infinito. Allora* E *ha almeno un punto di accumulazione in* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione Poiché E è infinito, dalla Proposizione 1.69–(i), segue che E contiene una successione iniettiva $\{a_n\}$, che è limitata essendo E limitato. L'asserto segue dal punto (i) (essendo $\{a_i\}$ iniettiva[8]). ∎

[7] Questo, infatti, è uno degli enunciati standard del teorema di Bolzano–Weierstrass.
[8] Perché è necessaria questa specifica?