6.2.3 Successioni di Cauchy e funzioni uniformemente continue

Cominciamo a vedere alcune conseguenze del Teorema di Bolzano–Weierstrass. La prima, fondamentale, è legata alle successioni di Cauchy:

Definizione 6.20 *Una successione di numeri reali $\{a_n\}$ si dice* **di Cauchy** *(o* **fondamentale***) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon$, per ogni $n, m \geq N$.*

Teorema 6.21 *Una successione in $\mathbb{R}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dimostrazione Sia $a_n \to L \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Allora, esiste N tale che $|a_n - L| < \varepsilon/2$ per ogni $n \geq N$, allora se $n, m \geq N$ si ha che

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) - (a_m - L)| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \varepsilon\,,$$

e quindi $\{a_n\}$ è di Cauchy.
Sia, ora, $\{a_n\}$ una successione di Cauchy. Dimostriamo innanzitutto che $\{a_n\}$ è limitata: sia N tale che $|a_n - a_m| < 1$ per ogni $n, m \geq N$, allora, per ogni $n \geq N$ si ha che $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ e risulterà, quindi, $|a_n| \leq M$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $M := \max\{|a_1|, .., |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$. Allora, per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente ad $L \in \mathbb{R}$. Facciamo vedere, che anche $\{a_n\}$ converge ad L. Sia $\varepsilon > 0$ e sia N tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ per ogni $n, m \geq N$; sia, poi, k tale che $n_k \geq N$ e $|a_{n_k} - L| < \varepsilon/2$. Allora, per ogni $n \geq N$ si ha che

$$|a_n - L| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - L)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Vediamo una interessante applicazione di questi concetti alle funzioni uniformemente continue[11]:

Proposizione 6.22 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora, esiste una unica estensione continua di f a[12] $\overline{E}$.*

Dimostrazione L'osservazione fondamentale è che:

($*$) *f uniformemente continua su E e $\{x_n\} \subseteq E$ di Cauchy $\Longrightarrow$ $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy.*

Infatti, se ε e δ sono come in (2.26) e se fissiamo N tale che $|x_n - x_m| < \delta$ per ogni $n, m \geq N$, allora, da (2.26), segue che $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$.
Dimostriamo che *per ogni $x_0 \in \overline{E}\backslash E$ esiste finito* $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Per la Proposizione 6.7–(i), $\exists\, x_n \in E$ tali che $x_n \to x_0$. Per il Teorema 6.21, la successione $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, e per **($*$)**, anche $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy e quindi (di nuovo, Teorema 6.21) convergente a $L \in \mathbb{R}$. Sia ora $\{x'_n\}$ un'altra successione convergente a x_0 e sia $L' = \lim f(x'_n) \in \mathbb{R}$ (limite che esiste per gli stessi argomenti di prima). Sia $\varepsilon > 0$ e sia δ come in (2.26). Poiché $\lim(x_n - x'_n) = 0$, esiste N tale che $|x_n - x'_n| < \delta$ per ogni $n \geq N$ e, per (2.26), $|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon$; prendendo il limite in tale relazione otteniamo $|L - L'| \leq \varepsilon$, che, per l'arbitrarietà di ε, implica che $L = L'$. Quindi $\lim f(x_n)$ non dipende dalla particolare successione scelta, e questo (per il Teorema ponte) equivale a dire che esiste finito il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Poniamo ora $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in E$ e $\tilde{f}(x) = \lim_{y\to x} f(y)$ per $x \in \overline{E}\backslash E$: per costruzione $\tilde{f}$ estende f a $\overline{E}$ ed è continua su $\overline{E}$; l'unicità è ovvia. $\blacksquare$

[11] Definizione 2.53.
[12] Ossia, esiste una unica $\tilde{f} \in C(\overline{E})$ tale che $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in E$.

6.2.4 Massimo e minimo limite

Discutiamo qui *tutti* i possibili limiti di sottosuccessioni di una data successione.

Si ricordi la nozione di massimo limite di una successione $\{a_n\}$ (Definizione 5.17) e si definisca, analogamente, il **limite inferiore** (o ‘liminf’, o ‘minimo limite’) di $\{a_n\}$, come l’elemento di $\mathbb{R}^*$ dato da

$$\liminf a_n := \underline{\lim}\, a_n := \sup\{\underline{a}_n \big| n \geq 1\} = \lim_{n\to+\infty} \underline{a}_n\,, \quad \text{dove} \quad \underline{a}_n := \inf\{a_k \big| k \geq n\}\,. \tag{6.4}$$

Proposizione 6.23 *Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$.*

(i) *Esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che* $\lim a_{n_k} = \overline{\lim}\, a_n$.

(ii) *Se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione regolare*[13] *di $\{a_n\}$, allora* $\lim a_{n_k} \leq \overline{\lim}\, a_n$.

Dimostrazione (i) Se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, la tesi segue dal Lemma 6.17. Sia ora $\{a_n\}$ limitata superiormente e sia $L = \overline{\lim}\, a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Per ogni $n \geq 1$, sia $m_n \geq n$ tale che[14] $a_{m_n} > \bar{a}_n - \frac{1}{n}$. Poiché $m_n \to +\infty$, per il Lemma 6.17, esiste una sottosuccessione $\{m_{n_k}\}$ di $\{m_n\}$ tale che $m_{n_k} \to +\infty$. Allora la sottosuccessione $\{a_{m_{n_k}}\}$ verifica

$$\bar{a}_{n_k} - \frac{1}{n_k} < a_{m_{n_k}} \leq \bar{a}_{n_k}\,,$$

e quindi, poiché (Teorema ponte) $\lim \bar{a}_{n_k} = L$ si ha anche che $\lim a_{m_{n_k}} = L$.

(ii) Segue immediatamente prendendo il limite nella relazione $a_{n_k} \leq \bar{a}_{n_k}$. ∎

Naturalmente vale un’affermazione analoga nel caso del limite inferiore (la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio[15]):

Proposizione 6.24 *Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$.*

(i) *Esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che* $\lim a_{n_k} = \underline{\lim}\, a_n$.

(ii) *Se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione regolare di $\{a_n\}$, allora* $\lim a_{n_k} \geq \underline{\lim}\, a_n$.

Definizione 6.25 *Data una successione $\{a_n\}$, definiamo $\mathcal{L}_{\{a_n\}}$* **l’insieme dei possibili limiti** *delle sottosuccessioni di $\{a_n\}$:* $\mathcal{L}_{\{a_n\}} := \Big\{L \in \mathbb{R}^* \Big| \exists\, \{a_{n_k}\} \text{ per cui } \lim a_{n_k} = L\Big\} \subseteq \mathbb{R}^*$.

Dalle Proposizioni 6.23 e 6.24 (e dal Teorema ponte) segue:

Proposizione 6.26 (i) $\overline{\lim}\, a_n = \max \mathcal{L}_{\{a_n\}}$ *e* $\underline{\lim}\, a_n = \min \mathcal{L}_{\{a_n\}}$

(ii) *$\{a_n\}$ è regolare con limite* $L \in \mathbb{R}^* \iff \mathcal{L}_{\{a_n\}} = \{L\} \iff \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = L$.

[13] Ossia, con limite in $\mathbb{R}^*$.

[14] Segue dalla caratterizzazione dell’estremo superiore.

[15] Esercizio **6.10**.

Esercizi

Esercizio 6.6 (i) Dimostrare che esistono infinite sottosuccessioni di $\{(-1)^n\}$ che tendono ad 1 (o a -1).
(ii) Sia $\{\varepsilon_k\}$ una qualunque successione con codominio $\{1,-1\}$. Dimostrare che esiste una sottosuccessione di $\{(-1)^n\}$ tale che $(-1)^{n_k} = \varepsilon_k$, $\forall k$.

Esercizio 6.7 Dimostrare il punto (ii) dell'Osservazione 6.19.

Esercizio 6.8 Si consideri la seguente relazioni tra successioni di numeri reali[16]:
$(*)$ $\qquad \{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N$ tale che $|a_n - b_m| < \varepsilon$, $\forall\, n, m \geq N$.
(i) Dimostrare che la relazione $(*)$ è una relazione d'equivalenza.
(ii) Dimostrare che se vale $(*)$ allora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono di Cauchy.

Esercizio 6.9 Dimostrare che l'estensione $\tilde{f}$ di f costruita nella dimostrazione della Proposizione 6.22 è *uniformemente continua su* $\overline{E}$.

Esercizio 6.10 Si dimostri la Proposizione 6.24.

Esercizio 6.11 Si dimostri che $\mathcal{L}_{\{\mathrm{sen}(n\pi/4)\}} = \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}/2\}$.

Esercizio 6.12 Si calcolino il massimo e minimo limite delle seguenti successioni[17]
(i) $1 + (-1)^{[n/3]}$; (ii) $\frac{n+1}{3n-1} + \tanh\big(n\,\mathrm{sen}(\pi n/4)\big)$; (iii) $(-1)^{[\frac{2}{3}n]} + (-1)^{[\frac{4}{3}n]}$; (iv) $\mathrm{sen}\, a_n$ con $a_n :=$ $\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n^2}(-1)^{k+1}$; (v) $\mathrm{sen}\,\frac{n^2\pi}{4} \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$; (vi) $\{\frac{n^2}{5}\}$; (vii) $\{\frac{n}{4}\} \cdot \{1 - \frac{n}{4}\}$; (viii) $n\sin(n\pi/2025)$.

Esercizio 6.13 Si considerino le successioni dell'Esercizio **6.12** e, per ognuna, si calcoli l'insieme dei possibili limiti $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\{a_n\}}$.

Esercizio 6.14 (**limsup e liminf di funzioni**) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}^*A$. Per ogni n, sia $U_n = (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$, $U_n = (n, +\infty)$ se $x_0 = +\infty$ e $U_n = (-\infty, -n)$ se $x_0 = -\infty$. Definiamo poi

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_n := \sup\{f(x)\big| x \in A \cap U_n\}, && \underline{a}_n := \inf\{f(x)\big| x \in A \cap U_n\},\\
&\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f := \inf \bar{a}_n = \lim \bar{a}_n, && \underline{\lim_{x\to x_0}}\, f := \sup \underline{a}_n = \lim \underline{a}_n,\\
&\mathcal{L}_f(x_0) := \big\{L \in \mathbb{R}^*\big|\ \exists\, x_n \in A \text{ per cui } \lim x_n = x_0 \text{ e } \lim f(x_n) = L\big\}.
\end{aligned}$$

Dimostrare che: (i) esistono due successioni in A, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, che tendono a x_0 e tali che $\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f = \lim f(x_n)$ e $\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f = \lim f(y_n)$; (ii) se $L \in \mathcal{L}_f$ allora $\underline{\lim}\, f \leq L \leq \overline{\lim}\, f$; (iii) $\lim_{x\to x_0} f = L$ se e solo se $\mathcal{L}_f = \{L\}$.

Esercizio 6.15 Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}^*A$. Siano $M_n \in \mathbb{R}$ tali che $\lim M_n = +\infty$; siano $r_n > 0$ tali che $\lim r_n = 0$ e si definisca:
$V_n = (x_0 - r_n, x_0 + r_n)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$, $V_n = (M_n, +\infty)$ se $x_0 = +\infty$ e $V_n = (-\infty, -M_n)$ se $x_0 = -\infty$;
$\bar{a}'_n := \sup\{f(x)\big| x \in A \cap V_n\}$, $\quad \underline{a}'_n := \inf\{f(x)\big| x \in A \cap V_n\}$;
Si dimostri che $\lim \bar{a}_n = \lim \bar{a}'_n$ e che $\lim \underline{a}'_n = \lim \underline{a}_n$ (in altri termini, la definizione di limsup e liminf 'non dipende dalla particolare successione di intorni di x_0').

[16] Basandosi su questo fatto, G. Cantor usa le successioni di Cauchy per dare una definizione rigorosa dei numeri reali in termini dei numeri razionali; cfr. https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Cantor/Ausdehnung/.

[17] Come al solito, $[\cdot]$ è la parte intera di x e $\{x\} = x - [x]$ è la parte frazionaria di x.