6.3 Compattezza

Definizione 6.27 *Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}$ si dice* **compatto** *(più precisamente "compatto per successioni") se comunque presa una successione in K esiste una sua sottosuccesione il cui limite appartiene a K.*

La seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$ è una conseguenza del Teorema di Bolzano–Weierstrass[18]:

Teorema 6.28 *Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione Sia K chiuso e limitato e sia $\{x_n\}$ una successione in K. Poiché $\{x_n\}$ è limitata, per il teorema di Bolzano–Weierstrass, è possibile estrarre una sottosuccession $\{x_{n_k}\}$ convergente e poiché K è chiuso, per la Proposizione 6.5, si ha che $\lim x_{n_k} \in K$.
Dimostriamo il viceversa per contrapposizione ed assumiamo quindi che K o non sia chiuso o non sia limitato.
Se K non è chiuso, dal punto (ii) del Lemma 6.6, segue che esiste una successione $\{x_n\}$ in K tale che $\lim x_n \notin K$ e quindi, poiché ogni sua sottosuccessione avrà lo stesso limite, non è possibile estrarre una sottosuccessione il cui limite sia in K.
Se K non è limitato, ad esempio, non è limitato superiormente (l'altro caso è analogo), allora, per ogni n, esisterà $x_n \in K$, tale che $x_n > n$, e, quindi, $\lim x_n = +\infty$ e quindi, poiché ogni sua sottosuccessione avrà lo stesso limite, non è possibile estrarre una sottosuccessione il cui limite sia in K. ∎

Proposizione 6.29 *Un insieme compatto non vuoto ha massimo e minimo.*

Dimostrazione Sia K un compatto non vuoto e sia $M = \sup K \in \mathbb{R}$ (essendo K limitato). Allora esiste una successione $\{x_n\}$ in K tale che[19] $\lim x_n = M$ ed essendo K chiuso $M = \lim x_n \in K$. Per il minimo si ragiona in modo analogo. ∎

Diamo alcuni esempi di insiemi compatti.

(i) Ovviamente, gli intervalli $[a, b]$, $(-\infty < a \le b < +\infty)$, sono compatti, così come l'unione finita di intervalli compatti.

(ii) Un insieme compatto che non sia unione finita di intervalli compatti è l'insieme $K = \cup_{n\ge1} I_n$ con[20] $I_n := [\frac{1}{n} - \frac{1}{4^n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{4^n}]$. Infatti, K è limitato e se $\{x_n\}$ è una successione in K convergente a x_0 si hanno due casi: o $x_0 = 0 \in K$ oppure $x_0 > 0$, nel qual caso $x_n > x_0/2$ definitivamente (per definizione di limite) e quindi $x_n \in K_N := \cup_{1\le k\le N} I_k$ per un N opportuno e quindi (per (i)) $x_0 \in K_N \subseteq K$. Quindi K è anche chiuso e per il Teorema 6.28, compatto.

(iii) **(Insieme ternario di Cantor[21])** Definiamo $K \subseteq [0, 1]$ iterativamente come segue. $K_0 = [0, 1] =: E_1^0$, $K_1 = [0, \frac{1}{3},] \cup [\frac{2}{3}, 1] =: E_1^1 \dot\cup E_2^1$, e, per $n \ge 2$, K_n è dato dall'unione

[18] Infatti, a volte, anche il Teorema 6.28 viene chiamato Teorema di Bolzano–Weierstrass.
[19] Proposizione 2.44.
[20] È facile visualizzare l'insieme K poiché gli I_n sono tutti disgiunti tra loro, essendo $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4^{n+1}} < \frac{1}{n} - \frac{1}{4^n}$.
[21] Cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set.

disgiunta di 2^n intervalli chiusi E_j^n, $1 \le j \le 2^n$, di lunghezza $1/3^n$ ottenuti sostituendo ogni intervallo $E_j^{n-1} := [a_j^{n-1}, b_j^{n-1}]$ con l'unione (disgiunta) dei due suoi sotto–intervalli

$$\left[a_j^{n-1}, a_j^{n-1} + \frac{1}{3^n}\right] \dot\cup \left[b_j^{n-1} - \frac{1}{3^n}, b_j^{n-1}\right] =: E_{2j-1}^n \dot\cup E_{2j}^n .$$

$K_n \subseteq K_{n-1}$ per ogni n ed è un insieme elementare compatto di misura $(2/3)^n$. L'insieme *K è definito come*[22] $\cap_n K_n$: tale insieme è limitato (essendo un sottoinsieme di $[0,1]$) ed è chiuso (essendo intersezione di chiusi) e quindi, per il Teorema 6.28, è compatto. Si osservi che, per ogni $n \ge 1$ e j, gli estremi degli intervalli E_{2j-1}^n e E_{2j}^n appartengono a E_j^{n-1} e quindi a K; quindi *l'insieme $\mathcal{K}$ formato da tutti gli estremi a_j^n e b_j^n, è un sottoinsieme di K*, che, in particolare, quindi è un insieme di cardinalità infinita[23]. Altre proprietà notevoli di K sono[24]:

K non ha punti isolati (quindi[25] $K = \mathcal{D}K$); *K è totalmente disconnesso*[26]; $K = \overline{\mathcal{K}}$.

6.3.1 Teorema di Weierstrass

Le funzioni continue trasformano i compatti in compatti:

Proposizione 6.30 *Se $f \in C(K)$ con K compatto, allora $f(K)$ è un compatto.*

Dimostrazione Fissiamo una successione $\{y_n\}$ in $f(K)$ e siano $x_n \in K$ tali che $f(x_n) = y_n$. Poiché K è compatto, esiste $x_{n_k} \to z \in K$ e poiché f è continua, $\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = f(z) \in f(K)$, il che mostra che $f(K)$ è compatto. ∎

Osservazione 6.31 In generale, la preimmagine di un insieme compatto non è compatta: ad esempio, $\mathrm{sen}^{-1}\big([-1,1]\big) = \mathbb{R}$.

Dalla Proposizione 6.30 e dalla Proposizione 6.29 segue il seguente fondamentale

Teorema 6.32 (Weierstrass) *Sia K compatto e $f \in C(K)$. Allora f assume massimo e minimo su K.*

Dimostrazione Per la Proposizione 6.30, $K' := f(K)$ è compatto. Per la Proposizione 6.29 segue che esistono $m, M \in K'$ tali che $m \le y \le M$ per ogni $y \in K'$ e quindi (essendo $K' = f(K)$ esistono $x_m, x_M \in K$ tali che $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$ e $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ per ogni $x \in K$. ∎

---

[22] Si noti che $K \subseteq K_n$ per ogni n e questi è un insieme elementare di misura $(2/3)^n$: questo implica che K è un "insieme di misura nulla": cfr. Esercizio 6.31.

[23] Infatti, non numerabile, come segue dalla stessa dimostrazione fatta per provare che $\mathbb{R}$ non è numerabile; cfr. Proposizione 1.69.

[24] Esercizio **6.17**.

[25] Proposizione 6.7–(ii).

[26] Ossia, per ogni coppia di punti $x < y$ in K esiste $z \notin K$ tale che $x < z < y$.

Osservazione 6.33 (i) Si ricordi che dal teorema dei valori intermedi per funzioni continue segue che *le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli*[27], e dunque: se $I = [a,b]$ è un intervallo compatto e $f \in C([a,b])$ allora da (i) e dalla Proposizione 6.30 segue che $J = f([a,b])$ è compatto il che, per un intervallo, significa che $J = [m,M]$, dunque:

$$f \in C([a,b]) \implies f([a,b]) = [m,M]\,, \tag{6.5}$$

dove m e M sono il, rispettivamente, il minimo ed il massimo di f su $[a,b]$.

6.3.2 Teorema di Heine–Cantor

Teorema 6.34 (Heine–Cantor) *Sia $f \in C(K)$ con K compatto. Allora, f è uniformemente continua su K.*

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che f non sia uniformemente continua su K. Allora, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$ esisterebbero x e $y \in K$ con $|x-y| < \delta$ ma $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Quindi, scegliendo $\delta = 1/n$, si potrebbero trovare x_n e $y_n \in K$ con $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Poiché K è compatto, esisterebbe una sottosuccesione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un $\bar{x} \in K$. Ma, siccome $|x_n - y_n| \to 0$, ne seguirebbe che

$$|y_{n_k} - \bar{x}| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \bar{x}| \to 0\,,$$

e quindi anche $y_{n_k} \to \bar{x}$. Allora, avremmo la seguente contraddizione:

$$0 = |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0\,. \quad \blacksquare$$

Esercizi

Esercizio 6.17* Sia K l'insieme ternario di Cantor definito a pag. 221.
(i) Dimostrare che K non ha punti isolati, ossia, che $K = \mathcal{D}K$.

[**Suggerimento**: Se $x \in K$, per ogni n esiste j tale che $x \in E_j^n$; sia x_n uno degli estremi di E_j^n tale che $x_n \neq x$,...]

(ii) Dimostrare che per ogni $x < y$ punti di K esiste $z \in (x,y)$ tale che $z \notin K$.

[**Suggerimento**: Sia n tale che $1/3^n < y - x$. Allora devono esistere $i \neq j$ tali che $x \in E_i^n$ e $y \in E_j^n$,....]

(iii) Per ogni[28] $\{\varepsilon_k\} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$, sia $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k/3^k$; dimostrare che $x \in K$. Viceversa se $x \in K$ trovare una successione $\{\varepsilon_k\} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ tale che $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k/3^k$. Dimostrare che $\overline{\mathcal{K}} = K$

[**Suggerimento**: $\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k/3^k$ è un a_j^n per un qualche j; $b_j^n = a_j^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2/3^k$.]

(iv) Dimostrare $\#K = \#\mathbb{R}$.

Esercizio 6.18 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato. Dimostrare che una funzione f è uniformemente continua su E se e solo se f è la restrizione di una funzione $\tilde{f}$ continua su $\overline{E}$.

Esercizio 6.19 Dimostrare che se f è uniformemente continua su E limitato, allora f è limitata.

[**Suggerimento**: Usare l'Es **6.18** e il teorema di Weierstrass.]

[27] Corollario 2.62–(ii).
[28] $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ denota l'insieme delle successioni a valori in $\{0,2\}$.

Esercizio 6.20 Dare un esempio di funzione continua e limitata su $(0,1]$ e tale che non esiste una estensione continua su $[0,1]$.

Esercizio 6.21 Dimostrare che $f : E \to \mathbb{R}$ *non è uniformemente continua su* E *se e solo se esistono* $\varepsilon > 0$ *e* $x_n, y_n \in E$ *tali che* $|x_n - y_n| \to 0$ *ma* $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Esercizio 6.22 Dimostrare che una funzione continua su $\mathbb{R}$ e periodica è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.23 Sia $f \in C(E)$ con E chiuso, limitato inferiormente ma non superiormente. Dimostrare che se esiste finito il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, allora f è uniformemente continua su E.

Esercizio 6.24 Dimostrare il seguente "teorema dell'asintoto[29]":

Sia f *una funzione continua su* $[c,+\infty)$ *con asintoto*[30] *in* $+\infty$. *Allora,* f *è uniformemente continua su* $[c,+\infty)$.

[**Suggerimento**: Dalla definizione di asintoto segue che esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali $g(x) := f(x) - ax \to b$ per $x \to +\infty$.]

Esercizio 6.25 Discutere l'uniforme continuità di $x \operatorname{sen} x$ e di $\cos x^2$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.26 Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen}(2^n x)$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.27* Dimostrare che se $K \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e $f \in C(K)$ è iniettiva. Allora, la funzione inversa $g = f^{-1}$ è continua su $D := f(K)$.

Le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli. Lo scopo dei prossimi due esercizi è far vedere come si possono trasformare gli intervalli tramite funzioni continue.

Esercizio 6.28 Sia $J = [0,+\infty)$ e $\varphi : x \in J \mapsto \varphi(x) := e^{-x} + x \operatorname{sen}^2 x$. Dimostrare che: φ è continua su J; $\varphi(x) > 0\,, \forall\, x \in J$; $\inf\limits_J \varphi = 0\,, \sup\limits_J \varphi = +\infty$; $\varphi(J) = (0,+\infty)$.

Esercizio 6.29* Sia $I_0 := [0,1]$, $I_1 := (0,1)$, $I_2 = [0,1)$, $I_3 := [0,+\infty)$, $I_4 := (0,+\infty)$.
(i) Dimostrare che per ogni $1 \leq k \leq 4$ e per ogni $0 \leq j \leq 4$ esiste una funzione continua f_{kj} da I_k su I_j (ossia $f_{kj} : I_k \to I_j$ con $f_{kj}(I_k) = I_j$).
(ii) Dimostrare che per $k = 0$ è possibile trovare una funzione continua solo da I_0 su I_0 ma non su I_j con $j > 0$.

[29] Naturalmente, un teorema analogo vale su insiemi $(-\infty, c]$.

[30] Si ricorda che una funzione $f : [c,+\infty) \to \mathbb{R}$ ha un asintoto in $+\infty$ se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ e se $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, il che equivale a dire che $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$.